

B.Sc. (Part-III) EXAMINATION, 2021

(Faculty of Science)

(Three-Year Scheme)

(10+2+3)

MATHEMATICS

Paper-I

ALGEBRA

Maximum Marks : 20

Time Allowed : 1 ½ Two Hours

Note. (1) Attempt three question in all.

कोई 3 प्रश्नों हल करने है।

(2) No supplementary answer-book will be given to any candidate. Hence the candidates should write the answer precisely in the main answer book only.

किसी भी परीक्षार्थी को पूरक उत्तर-पुस्तिका नहीं दी जायेगी। अतः परीक्षार्थियों को चाहिये कि वे मुख्य उत्तर-पुस्तिका में ही समस्त प्रश्नों के उत्तर लिखें।

(3) All the parts of one question should be answered at one place in the answer book. One complete question should not be answered at different places in the answer-book.

किसी भी एक प्रश्न के अन्तर्गत पूछे गए विभिन्न प्रश्नों के उत्तर उत्तर-पुस्तिका में अलग-अलग स्थानों पर हल करने के बजाय एक ही स्थान पर हल करें।

B.Sc. (Part-III) EXAMINATION, 2021

(Faculty of Science)

(Three-Year Scheme)

(10+2+3)

MATHEMATICS

Paper-I

ALGEBRA

Maximum Marks : 20

Time Allowed : 1 ½ Two Hours

Unit - I**ईकाई—I**

- Q.1. (a) Prove that the order of every element of a finite group is finite and less than or equal to the order of the group. 4/5½

सिद्ध कीजिये किसी परिमित ग्रुप (समूह) के प्रत्येक अवयव की कोटि परिमित होतह है तथा यह या तो ग्रुप की कोटि के बराबर होती है या इससे कम।

- (b) Find all the generators of the group. 4/5½

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, X_7]$

निम्न ग्रुप के सभी जनक ज्ञात कीजिये

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, X_7]$

Q.2. (a) If $P \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot q = (2 \ 3 \ 4)$

then prove that: $Pqp^{-1} = (P(2) P(3) P(4))$

यदि $P \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot q = (2 \ 3 \ 4)$

तो सिद्ध कीजिये कि : $Pqp^{-1} = (P(2) P(3) P(4))$

(b) Prove that every subgroup of a cyclic group is a cyclic group. 4/5½

सिद्ध कीजिये एक चक्रीय समूह का उपसमूह चक्रीय होता है।

Unit - II

ईकाई-II

Q.3. (a) Prove that every infinite cyclic group is isomorphic to the additive group of Integers. 4/5½

सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक असीमित चक्रीय ग्रुप पूर्णाकों के योज्य ग्रुप के तुल्यकारी होता है।

(b) Show that the group $G = \langle \{0,1,2,3\}, +_4 \rangle$ is isomorphic to the group $G' = \langle \{1,2,3,4\}, X_5 \rangle$

सिद्ध कीजिये कि ग्रुप $G = \langle \{0,1,2,3\}, +_4 \rangle$, ग्रुप $G' = \langle \{1,2,3,4\}, X_5 \rangle$ के तुल्यकारी है।

Q.4. (a) Prove that a subgroup N of a group G is normal subgroup iff $gNg^{-1} = N$, $\forall g \in G$

सिद्ध कीजिये समूह (ग्रुप) G का उपसमूह (उपग्रुप) N एक विशिष्ट उपसमूह (उपग्रुप) होगा यदि और केवल यदि $gNg^{-1} = N$, $\forall g \in G$

- (b) Find the quotient group G/H when $G = \langle \mathbb{Z}_8, +_8 \rangle$ $H = \langle \{0, 4\}, +_8 \rangle$ 4/5

अवशेष वर्ग समूह G/H को लिखिये जबकि

$$G = \langle \mathbb{Z}_8, +_8 \rangle \quad H = \langle \{0, 4\}, +_8 \rangle$$

Unit - III

ईकाई-III

- Q.5. (a) Prove that a finite commutative ring without zero divisor is a field. 4/5½

सिद्ध कीजिये कि शून्य के भाजकों से रहित परिमित क्रमविनिमेय वलय एक क्षेत्र होता है।

- (b) Prove that the set $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ is a commutative ring with respect to the binary operation addition modulo n ($+$) and multiplication modulo n (\times). 4/5

सिद्ध कीजिये कि समुच्चय $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ द्विआधारी संक्रियाएं जोड़ व गुणन प्रमाप n , के सम्बन्ध में एक क्रमविनिमेय तत्समकी वलय है।

- Q.6. (a) Show that the set $S = \{a+ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$, with respect to addition and multiplication defined on \mathbb{C} is a subring of the ring \mathbb{C} . 4/5½

सिद्ध कीजिये कि समुच्चय $S = \{a+ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$, \mathbb{C} पर परिभाषित साधारण योग तथा गुणा के सापेक्ष वलय \mathbb{C} का उपवलय है।

- (b) Prove that every prime field of characteristic zero is isomorphic to the field \mathbb{Q} of rational numbers. 4/5

सिद्ध कीजिये शून्य अभिक्षण का प्रत्येक अभाज्य क्षेत्र परिमेय संख्याओं के क्षेत्र \mathbb{Q} के तुल्यकारी होता है।

Unit - IV

ईकाई-IV

- Q.7. (a) Prove that every homomorphic image of a ring R is isomorphic to some quotient ring (residue class ring) these of 4/5½
सिद्ध कीजिये किसी वलय R की प्रत्येक समाकारिता प्रतिबिम्ब उसके किसी विभाग वलय (अवशेष वर्ग वलय) के तुल्यकारी होती है।
- (b) Find all the principal ideals of the ring $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, *6, ^6$
वलय $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, *6, ^6$ की सभी मुख्य गुणजावली ज्ञात कीजिये।
- Q.8. (a) Prove that the union of two subspaces W_1 and W_2 of a vector space V is a subspace if either $W_1 \subset W_2$ or $W_2 \subset W_1$.
सिद्ध कीजिये कि किसी सदिश समष्टि V की दो उपसमष्टियों W_1 तथा W_2 का संघ एक उपसमष्टि होता है यदि और केवल और $W_1 \subset W_2$ या $W_2 \subset W_1$.
- (b) Show that the set $W = \{(x, y, z) \mid x-3y+4z=0; x, y, z \in R\}$ of 3-types is a subspace of the vector space $V_3(R)$ 4/5
सिद्ध कीजिये कि समुच्चय $W = \{(x, y, z) \mid x-3y+4z=0; x, y, z \in R\}$ 3-टुपलों के सदिश समष्टि $V_3(R)$ की उपसमष्टि है।

Unit - V

ईकाई-V

- Q.9. (a) Show that the following vectors generate or span the vector space $V_3(R)$
 $4_1 = (1, 2, 3); 4_2 = (0, 1, 2); 4_3 = (0, 0, 1)$ 4/5½
प्रदर्शित कीजिये कि निम्न सदिश, सदिश समष्टि $V_3(R)$ को विस्तृति करते हैं।
 $4_1 = (1, 2, 3); 4_2 = (0, 1, 2); 4_3 = (0, 0, 1)$

(b) Prove that every non-empty subset of a L.I. set of vectors is also L.I.

सिद्ध कीजिये सदिशों के एकघाततः स्वतन्त्र समुच्चय का प्रत्येक अरिक्त उपसमुच्चय भी एकघाततः स्वतन्त्र होता है।

Q.10. (a) Prove that the mapping $f : V_3(\mathbb{R}) \rightarrow V_2(\mathbb{R})$ defined by $f [4_1, 4_2, 4_3] = (4_1, 4_2)$ is a homomorphism and its Kernel $K_f = \{(0, 0, 4)\}$

सिद्ध कीजिये कि $f : V_3(\mathbb{R}) \rightarrow V_2(\mathbb{R})$ का पर प्रतिचित्रण जो कि निम्न प्रकार परिभाषित है। $f [4_1, 4_2, 4_3] = (4_1, 4_2)$ एक समाकृतिकता होगा तथा इसकी अष्टि $K_f = \{(0, 0, 4)\}$ है

(b) If W is a subspace of a vector space $V(F)$, then prove that the quotient space V/W is a homomorphic image of V with kernel W . 4/5

यदि W किसी सदिश समष्टि $V(F)$ की एक उपसमष्टि है तो सिद्ध कीजिये कि विभाग समष्टि V/W , V का एक समाकारी प्रतिबिम्ब है, जिसकी अष्टि W है।

<https://www.pdusuonline.com>

Whatsapp @ 9300930012

Send your old paper & get 10/-

अपने पुराने पेपर्स भेजे और 10 रुपये पायें,

Paytm or Google Pay से