

B.A./B.Sc. (Part – III) Examination, 2022
(Three -Year Scheme)
(10+2+3)

(Common for the Faculties of Art and Science)

MATHEMATICS

Paper-II

COMPLEX ANALYSIS

Time : 3 Hours

Maximum Marks : 40 for Science

53 for Arts

Note : Attempt five questions in all, selecting one question from each unit. All questions carry equal marks.

प्रत्येक इकाई में से एक प्रश्न का चयन करते हुए, कुल पाँच प्रश्न हल करने हैं। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

- (1) No supplementary answer-book will be given to any candidate. Hence the candidates should write the answer precisely in the main answer book only.

किसी भी परीक्षार्थी को पूरक उत्तर-पुस्तिका नहीं दी जायेगी। अतः परीक्षार्थियों को चाहिये कि वे मुख्य उत्तर-पुस्तिका में ही समस्त प्रश्नों के उत्तर सही ढंग से लिखें।

- (2) All the parts of one question should be answered at one place in the answer-book. One complete question should not be answered at different places in the answer-book.

किसी भी एक प्रश्न के अंतर्गत पूछे गए विभिन्न प्रश्नों के उत्तर उत्तर-पुस्तिका में अलग-अलग स्थानों पर हल करने के बजाय एक ही स्थान पर हल करें।

UNIT - I

इकाई - I

1. (a) Prove that a Stereographic projection projects circles into circles or straight lines. 4/5

सिद्ध कीजिए कि एक त्रिविम प्रक्षेप, वृत्तों को वृत्तों में या सरल रेखाओं में प्रक्षेप करता है।

4/5

(b) Define the following :

- | | |
|---------------------|--------------------------|
| (i) Neighbourhood | (ii) Closed Set |
| (iii) Connected Set | (iv) Limit of a sequence |
| (v) Compact Set | |

निम्न को परिभाषित कीजिए :

- | | |
|-----------------------|----------------------|
| (i) प्रतिवेश | (ii) संवृत समुच्चय |
| (iii) सम्बद्ध समुच्चय | (iv) अनुक्रम की सीमा |
| (v) संहत समुच्चय | |

2. (a) Find the sufficient condition for $f(z)$ to be analytic. 4/5

फलन $f(z)$ के विश्लेषिक होने का पर्याप्त प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए।

- (b) Prove that the following function is harmonic. Also determine the harmonic conjugate and find the corresponding $f(z)$ in terms of $f(z)$

$$u(x, y) = e^x \cos y$$

सिद्ध कीजिए कि निम्न फलन प्रसंवादी है। संयुग्मी प्रसंवादी भी निर्धारित कीजिए तथा संगत फलन $f(z)$, $\bar{f}(z)$ के पदों में ज्ञात कीजिए।

4/5

$$u(x, y) = e^x \cos y$$

UNIT - II

इकाई - II

3. (a) Let $f(z)$ be a single valued analytic function in a simply connected domain G . If $a, b \in G$ then prove that 4/5

$$\int_a^b f(z) dz = \phi(b) - \phi(a)$$

where $\phi(z)$ is an indefinite integral of $f(z)$.

एकशः सम्बद्ध प्रान्त G में $f(z)$ एक एकमानी विश्लेषिक फलन है। यदि $a, b \in G$ तो सिद्ध कीजिए

$$\int_a^b f(z) dz = \phi(b) - \phi(a)$$

जहाँ, $\phi(z)$, $f(z)$ का अनिश्चित समाकल है।

- (b) If C is a square with vertices $1 \pm i, -1 \pm i$ then verify the Cauchy's theorem for the function $3z^2 + iz - 4$. 4/5

यदि C एक वर्ग है जिसके शीर्ष $1 \pm i, -1 \pm i$ हैं तो फलन $3z^2 + iz - 4$ के लिए कौशी प्रमेय का सत्यापन कीजिए।

4. (a) State and prove Morera's Theorem. 4/5
 मोरेरा प्रमेय का कथन देकर सिद्ध कीजिए ।
- (b) Find the value of $\int_{|z|=2} \frac{z-3\cos z}{(z-\frac{\pi}{2})^2} dz$ 4/5
 मान ज्ञात कीजिए : $\int_{|z|=2} \frac{z-3\cos z}{(z-\frac{\pi}{2})^2} dz$

UNIT - III
इकाई - III

5. (a) Prove that if a function $f(z)$ is analytic for all finite values of z and is bounded then it is a constant function. 4/6
 सिद्ध कीजिए यदि z के प्रत्येक परिमित मान के लिए $f(z)$ एक विश्लेषिक फलन हो तथा परिवद्ध हो तो यह अचर फलन होगा ।
- (b) Expand $\sin z$ in a Taylor's series about $z = 0$. 4/5
 $\sin z$ का $z = 0$ के सामीप्य में टेलर श्रेणी में प्रसार कीजिए ।
6. (a) Find the different expansions of $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$ in powers of z , which are valid for the regions 4/6
 (i) $|z| < 1$ (ii) $1 < |z| < 3$ (iii) $|z| > 3$
 फलन $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$ का z की घातों में प्रसार कीजिए, जो कि निम्न क्षेत्रों में वैध हो
 (i) $|z| < 1$ (ii) $1 < |z| < 3$ (iii) $|z| > 3$
- (b) Prove that a power series represents an analytic function inside its circle of convergence. <https://www.pdsuonline.com> 4/5
 सिद्ध कीजिए कि एक घात श्रेणी अपने अभिसरण वृत्त के अन्दर प्रत्येक बिन्दु पर विश्लेषिक फलन निरूपित करती है ।

UNIT - IV
इकाई - IV

7. (a) Prove that the necessary and sufficient condition for an isolated singularity $z = a$ to be pole of function $f(z)$ is that $|f(z)| \rightarrow \infty$ as $z \rightarrow a$ in any manner. 4/6
 सिद्ध कीजिए वियुक्त विचित्रता $z = a$ का, फलन $f(z)$ का अनन्तक होने के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबन्ध है कि किसी भी प्रकार $z \rightarrow a$ हो तो $|f(z)| \rightarrow \infty$
- (b) Find the kind of singularity of the function $f(z) = \frac{\sin z}{(z-\pi)^2}$ at $z = \pi$. 4/5
 फलन $f(z) = \frac{\sin z}{(z-\pi)^2}$ की $z = \pi$ पर विचित्रता की प्रकृति ज्ञात कीजिए ।

8. (a) Prove that every polynomial of degree n has exactly n -zero. 4/5
 सिद्ध कीजिए कि कोटि n के प्रत्येक बहुपद के ठीक n -शून्य होते हैं।

- (b) Find the residues of $\frac{z^2}{(z-1)(z-2)(z-3)}$ at $z = 1, 2, 3$ and infinity and show that their sum is zero. 4/6

$\frac{z^2}{(z-1)(z-2)(z-3)}$ का $z = 1, 2, 3$ एवं अनन्त पर अवशेष ज्ञात कीजिए तथा प्रदर्शित कीजिए कि उनका योग शून्य है।

UNIT - V

इकाई - V

9. (a) If $w = f(z)$ represent a conformal mapping of a domain D in the z -plane into D' of the w -plane then prove that $f(z)$ is an analytic function of z in D . 4/6
 यदि $w = f(z)$, z समतल के डोमेन D से w -समतल के डोमेन D' अनुकोण प्रतिचित्रण है तो सिद्ध कीजिए कि $f(z)$, D में z का विश्लेषिक फलन होता है।

- (b) Find a bilinear transformation that maps the points $z = 2, i, -2$ into $w = 1, i, -1$ respectively. 4/5
 एक द्विरेखिक रूपान्तरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $z = 2, i, -2$ को क्रमशः $w = 1, i, -1$ में प्रतिचित्रित करें।

10. (a) Prove by contour integration that $\int_0^{\infty} \frac{\log(1+x^2)}{(1+x^2)} dx = \pi \log 2$. 4/5

परिरेखा समाकलन द्वारा सिद्ध कीजिए कि $\int_0^{\infty} \frac{\log(1+x^2)}{(1+x^2)} dx = \pi \log 2$.

- (b) Prove that the function $f_1(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} dt$ can be continued analytically. Also construct a power series which is analytic continuation of $f_1(z)$. 4/6

सिद्ध कीजिए कि फलन $f_1(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} dt$ का विश्लेषिक सांतत्य किया जा सकता है। इसके साथ ही एक घात श्रेणी की रचना कीजिए जो कि $f_1(z)$ का विश्लेषिक सांतत्य हो।