2040(1)

Math-I

Printed Pages : 3

# B.A./B.Sc. (Part-II) EXAMINATION, 2021

## (Common for the Faculties of Arts and Science)

## (Three-Year Scheme of 10+2+3)

## MATHEMATICS

## Paper–I

## REAL ANALYSIS AND METRIC SPACE

Time Allowed : 1½ Hours

Maximum Marks : 40 for Science
53 for Arts

Note (1) Examinees to attempt questions of 50% marks out of given maximum marks

परीक्षार्थी को कुल पूर्णांक के 50% अंकों के प्रश्नों का उत्तर देना है।

(2) No supplementary answer-book will be given to any candidate. Hence the candidates should write the answer precisely in the main answer book only.

किसी भी परीक्षार्थी को पूरक उत्तर-पुस्तिका नहीं दी जायेगी। अतः परीक्षार्थियों को चाहिए कि वे मुख्य उत्तर-पुस्तिका में ही समस्त प्रश्नों के उत्तर लिखें।

(3) All the parts of one question should be answred at one place in the answer-book. One complete question should not be answered at different places in the answer-book

किसी भी एक प्रश्न के अन्तर्गत पूछे गए विभिन्न प्रश्नों के उत्तर, उत्तर-पुस्तिका में अलग-अलग स्थानों पर हल करने के बजाय एक ही स्थान पर हल करें।

Q.1. (a) Prove that in a Matric space, every closed sphere is a closed set.

सिद्ध कीजिये कि एक दूरीक समष्टि में प्रत्येक संवृत गोलक एक संवृत समुच्चय होता है।

(b) State and prove the Heine-Borel theorem.

हेन–बोरेल प्रमेय का कथन लिखकर सत्यापित कीजिए।

Q.2. (a) Let A and B be two bounded sets in A Matric space (X, d) then prove that $A \cup B$ is also bounded in (X, d).

माना कि A तथा B एक दूरीक समष्टि (X, d) के दो परिबद्ध समुच्चय है तब सिद्ध कीजिए कि $A \cup B$ भी (X, d) में परिबद्ध होगा।

(b) State and prove Bolzano-weierstress theorem.

वॉलजनो–वाइस्ट्रास प्रमेय का कथन लिखकर सत्यापित कीजिए।

Q.3. (a) The necessary and sufficient condition for a sequence to be convergent is that it is bounded and has a unique limit point.

एक अनुक्रम को अभिसृत होने कि आवश्यक एवं पर्याप्त शर्त है कि अनुक्रम परिबद्ध एवं अद्वितीय सीमा बिन्दु है।

(b) If a function f is continuous in [a, b] and $f(a) \neq f(b)$ then prove that f assumes every value between f (a) and f (b) at least once in [a, b].

यदि फलन f संवृत अन्तराल [a, b] में संतत है, और $f(a) \neq f(b)$ तो सिद्ध कीजिए f उस अन्तराल में f (a) तथा f (b) के मध्य प्रत्येक मान को कम से कम एक बार ग्रहण करता है।

Q.4. (a) If a function is continuous on [a, b] then prove that it is bounded in that interval.

यदि फलन f संवृत अन्तराल [a, b] में संतत है तो सिद्ध कीजिए यह उस अन्तराल में परिबद्ध होता है।

(b) By Cauchy's general principle of convergence for sequences, prove that the sequences $\{x_n\}$ where $x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ is convergent.

कोशी के अभिसरण के सामान्य सिद्धान्त से सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\{x_n\}$ जहाँ $x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ अभिसारी है।

Q.5. (a) If a function f is differentiable in [a, b] and f' (a) and f' (b) are of opposite signs then prove that there exists at least one point $c \in (a, b)$ such that $f'(c) = 0$.

यदि फलन f अन्तराल [a, b] मे अवकलनीय है तथा यदि f (a) तथा f (b) विपरीत चिन्हों के हों तब सिद्ध कीजिए विवृत अन्तराल (a, b) मे कम से कम एक बिन्दु c ऐसा विद्यमान होगा ताकि f (c) = 0

(b) Discuss the continuity and differentiablity of the function $f(x) = |x-1| + |x-3|$ in the interval [0, 3].

फलन $f(x) = |x-1| + |x-3|$ का अन्तराल [0, 3] में सांतत्य एवं अवकलनीयता का विवेचन कीजिए।

Q.6. (a) Verify Rolle's theorem for the function

$$f(x) = 8x - x^2, \quad x \in [2, 6]$$

रोल प्रमेय का सत्यापन कीजिए :

$$f(x) = 8x - x^2, \quad x \in [2, 6]$$

(b) Show that the following function is not totally differentiable at (0, 0).

प्रदर्शित करिये कि निम्न फलन (0, 0) पर सम्पूर्ण अवकलनीय नहीं है।

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Q.7. (a) Prove that every bounded function need not be R-integrable.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिबद्ध फलन आवश्यक रूप से R–समाकलनीय नहीं होता है। 

(b) If f is defined on [0, a], a > 0 by $f(x) = x^2$, $x \in [0, a]$ then show that $f \in R[0, a]$ and $\int_0^a f(x)\,dx = \frac{a^3}{3}$.

यदि f अन्तराल [0, a] में परिभाषित $f(x) = x^2$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $f \in R[0, a]$ तथा $\int_0^a f(x)\,dx = \frac{a^3}{3}$ जहाँ $a > 0$ और $x \in [0, a]$.

Q.8. (a) If a function f is bounded and has only a finite number of points of discontinuity in [a, b]. Then prove that f is R-Integrable over [a, b].

यदि एक फलन f अन्तराल [a, b] में असंतता के परिमित बिन्दु ही रखता है तथा फलन f परिबद्ध हो तो सिद्ध कीजिए कि f अन्तराल [a, b] में R-समाकलनीय होता है।

(b) Prove that the function $f(x) = [x]$, is R-integrable in interval [0, 3].

सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = [x]$, अन्तराल [0, 3] में R-समाकलनीय है।

Q.9. (a) Let a sequence $\{f_n(x)\}$ defined on the domain D Coverges pointwise to a function f (x) on D. i.e.

$$\underset{n\to\infty}{4m}\, f_n(x) = f(x), \quad \forall\, x \in D$$

Also let $M_n = \text{Sup}\{|f_n(x) - f(x)| : x \in D\}$. Then $\{f_n(x)\}$ convergs uniformly to f (x) if the sequence $\{M_n\}$ of positive real numbers converges to zero i.e.

$\underset{n\to\infty}{4m}\, M_n = 0$.

माना किसी प्रान्त D पर परिभाषित वास्तविक मान फलनों का अनुक्रम $\{f_n(x)\}$ पर फलन f (x) को बिन्दुशः अभिसृत होता है।

अर्थात् $\underset{n\to\infty}{4m}\, f_n(x) = f(x), \quad \forall\, x \in D$

यह भी माना कि $M_n = \text{Sup}\{|f_n(x) - f(x)| : x \in D\}$ तो $\{f_n(x)\}$ एक समान अभिसृत होता है यदि और केवल यदि धनात्मक वास्तविक संख्याओं का अनुक्रम $\{M_n\}$ शून्य को अभिसृत करता है। अर्थात् $\underset{n\to\infty}{4m}\, M_n = 0$

(b) Test the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}$ for uniform convergence in any finite interval.

श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}$ का किसी भी परिमित अन्तराल में एक समान अभिसरण का परीक्षण कीजिए।

Q.10. (a) If $\{f_n(x)\}$ be a sequence of continuous functions defined on interval [a, b] and it converges uniformly to a function f (x) on [a, b]. Then prove that f (x) is continuous on [a, b].

यदि किसी अन्तराल [a, b] पर परिभाषित संतत फलनों का अनुक्रम $\{f_n(x)\}$, [a, b] पर फलन f (x) को एक समान अभिसृत होता है तब सिद्ध कीजिए f (x), [a, b] पर संतत होता है।

(b) Prove that $\sum \frac{x}{n^P + n^q x^2}$, $\forall\, x \in R$ is uniformly convergent it $P + q > 2$.

सिद्ध कीजिए कि $\sum \frac{x}{n^P + n^q x^2}$, $\forall\, x \in R$ के लिए एक समान अभिसृत होता है यदि $P + q > 2$