**108**



# B.A./B.Sc. (Part – II) Examination, 2022

## (Common for the Faculties of Arts and Science)

(Three Year Scheme of 10+2+3)

# MATHEMATICS

## Paper-I

# REAL ANALYSIS

Time : **3 Hours**

Maximum Marks : 40 for Science
53 for Arts

**Note :** Attempt **five** questions in all, selecting **one** question from each unit. **All** questions carry equal marks.

प्रत्येक इकाई में से एक प्रश्न का चयन करते हुए, कुल पाँच प्रश्न हल करने हैं । सभी प्रश्नों के अंक समान है ।

(1) No supplementary answer-book will be given to any candidate. Hence the candidates should write the answer precisely in the main answer-book only.

किसी भी परीक्षार्थी को पूरक उत्तर–पुस्तिका नहीं दी जायेगी । अतः परीक्षार्थियों को चाहिये कि वे मुख्य उत्तर–पुस्तिका में ही समस्त प्रश्नों के उत्तर लिखें ।

(2) All the parts of one question should be answered at one place in the answer-book. One complete question should not be answered at different places in the answer-book.

किसी भी एक प्रश्न के अंतर्गत पूछे गए विभिन्न प्रश्नों के उत्तर उत्तर–पुस्तिका में अलग–अलग स्थानों पर हल करने के बजाय एक ही स्थान पर हल करें ।

## UNIT – I

## इकाई – I

1. (a) If $x$ any y are any two positive real numbers, then prove that $\exists\ n \in N$ such that $nx > y$. **4/5**

यदि $x$ और y कोई दो धनात्मक वास्तविक संख्याएँ हो, तो सिद्ध कीजिए कि एक ऐसा धन पूर्णांक n विद्यमान होता है कि $nx > y$ ।

(b) Prove that the set R of real numbers is a connected set. **4/5**

सिद्ध कीजिए कि वास्तविक संख्याओं का समुच्चय R सम्बद्ध समुच्चय है ।

2. Let (X, d) be a metric space and d* be denoted by

$$d^*(x, y) = \frac{M\, d(x, y)}{1 + d(x, y)},\ x, y \in X,\ M > 0$$

then prove that (X, d*) is also a metric space. **4/5**

माना (X, d) एक दूरिक समष्टि है एवं d* निम्न रूप से परिभाषित है

$$d^*(x, y) = \frac{M\, d(x, y)}{1 + d(x, y)},\ x, y \in X,\ M > 0$$

तो सिद्ध कीजिए कि (X, d*) भी एक दूरिक समष्टि है ।

UNIT - II

इकाई - II

3. (a) A sequence $<x_n>$ is defined by $x_n = \frac{n^2+1}{2n^2+5}$ then find $n_0$ such that $\lim x_n = 1/2$ 4/5

एक अनुक्रम $<x_n>$, जहाँ $x_n = \frac{n^2+1}{2n^2+5}$ से परिभाषित है, तो $n_0$ प्राप्त कीजिए ताकि $\lim x_n = 1/2$

(b) Show that the sequence $<x_n>$ converges to '1', where $x_1 = \frac{1}{2}$ and $x_{n+1} = \frac{2x_n+1}{3}$ 4/6

सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $<x_n>$, '1' को अभिसृत होता है जहाँ $x_1 = \frac{1}{2}$ एवं $x_{n+1} = \frac{2x_n+1}{3}$

4. (a) Applying Couchy's general principle of convergence show that the sequence $<x_n>$ is not convergent, where : 4/5

कोशी अभिसरण के सामान्य सिद्धान्त से सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $<x_n>$ अभिसारी नहीं है, जहाँ :

$$x_n = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+.....+\frac{1}{n}\right)$$

(b) If a function f is continuous in [a, b], then prove that it attains its supremum and infimum atleast once in [a, b]. 4/6

यदि फलन f संवृत अंतराल [a, b] में संतत है तो सिद्ध कीजिए कि वह उस अन्तराल में कम से कम एक बार अपने उच्चक व निम्नक को ग्रहण करता है ।

## UNIT – III

## इकाई – III

5. (a) If f be a function defined on [a, b] such that $f'(c)$ exists and is positive for some $c \in (a, b)$. Then show that there exists a nbd $(c - \delta, c + \delta)$ of point c in which $f(x)$ is strictly monotonic increasing. **4/6**

यदि फलन f अन्तराल [a, b] में परिभाषित है तथा इसके बिन्दु c पर f का अवकलज विद्यमान है तथा धनात्मक है तो सिद्ध कीजिए कि बिन्दु c का कोई प्रतिवेश $(c - \delta, c + \delta)$ ऐसा विद्यमान होगा जिसमें फलन एकदिष्ट वर्धमान होता है ।

(b) Show that between any two roots of $e^x \cos x = 1$, there exists atleast one root of $e^x \sin x = 1$.  **4/5**

प्रदर्शित कीजिए कि समीकरण $e^x \cos x = 1$ के किन्हीं दो मूलों के मध्य समीकरण $e^x \sin x = 1$ का कम से कम एक मूल विद्यमान होगा ।

6. (a) Prove that the real valued function $f(x, y)$ of two variables defined below is continuous at the origin : **4/5**

दिखाईए कि दो चरों का निम्न प्रकार परिभाषित वास्तविक मान फलन $f(x, y)$ मूल बिन्दु पर संतत है :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

(b) If a function $f(x, y)$ is differentiable at a point then show that it is continuous at that point also. **4/6**

यदि एक फलन $f(x, y)$ एक बिन्दु पर अवकलनीय है, तो प्रदर्शित कीजिए कि यह उस बिन्दु पर संतत भी है।

## UNIT – IV

## इकाई – IV

7. (a) Let f be a bounded function defined on [a, b] ; then $f \in R[a, b]$ if and only if given $\in > 0$, there exists a partition $p \in p[a, b]$ such that : **4/6**

$$\lfloor\rfloor(f, p) - \lfloor(f, p) < \in$$

फलन f, [a, b] पर परिसिमित है, तो $f \in R[a, b]$ यदि और केवल यदि प्रत्येक $\in > 0$ के लिए एक ऐसा विभाजन $p \in p[a, b]$ विद्यमान है कि

$$\lfloor\rfloor(f, p) - \lfloor(f, p) < \in$$

**4/5**

(b) Let f be a function defined on [0, 1] by

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{when } x \text{ is rational} \\ 0, \text{when } x \text{ is irrational} \end{cases}$$

then prove that $f \notin R\,[0, 1]$

माना f, [0, 1] पर निम्न प्रकार परिभाषित फलन है :

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{यदि } x \text{ परिमेय है} \\ 0, \text{यदि } x \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$$

तो सिद्ध कीजिए कि $f \notin R\,[0, 1]$

8. (a) Prove that every monotonic function is R-integrable. 4/6

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक एकदिष्ट फलन R-समाकलनीय है ।

(b) State and prove fundamental theorem of integral calculus. 4/5

समाकलन के मूल प्रमेय का कथन कीजिए और इसे सिद्ध कीजिए ।

## UNIT – V

## इकाई – V

9. (a) Prove that the sequence $<f_n(x)>$ is uniformly convergent in [0, 1], where :

$$f_n(x) = x^{n-1}(1-x)$$ 4/5

सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $<f_n(x)>$ अन्तराल [0, 1] में एकसमान अभिसृत होती है, जहाँ :

$$f_n(x) = x^{n-1}(1-x)$$

(b) Test for uniform convergence and term by term integration of the following series : 4/5

$$\sum \frac{x}{(n+x^2)^2}$$

निम्न श्रेणी को एकसमान अभिसरण तथा पदशः समाकलन के लिए जाँच कीजिए :

$$\sum \frac{x}{(n+x^2)^2}$$

10. (a) Show that the following series cannot be differentiated term by term at $x = 0$, where

$$S_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}, 0 \le x \le 1$$ 4/5

सिद्ध कीजिए कि निम्न श्रेणी $x = 0$ पर पदशः अवकलनीय नहीं है, जहाँ

$$S_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}, 0 \le x \le 1$$

(b) Examine the series $\sum_{n=1}^{\infty} xe^{-nx}$ for uniform convergence and continuity of its sum function near $x = 0$. 4/5

श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} xe^{-nx}$ के योग फलन का $x = 0$ के समीप एकसमान अभिसरण तथा सांतत्य का परीक्षण कीजिए।

---