170

Printed Pages : 8

B.A./B.Sc. (Part – II) Examination, 2022

(Three -Year Scheme)

(10+2+3)

(Common for the Faculties of Art and Science)

MATHEMATICS

Paper-III

NUMERICAL ANALYSIS AND VECTOR CALCULUS

Time : **3 Hours**

Maximum Marks : **40 for Science**

54 for Arts

Note : (1) No supplementary answer-book will be given to any candidate. Hence the candidates should write the answer precisely in the main answer-book only.

किसी भी परीक्षार्थी को पूरक उत्तर-पुस्तिका नहीं दी जायेगी । अतः परीक्षार्थियों को चाहिये कि वे मुख्य उत्तर-पुस्तिका में ही समस्त प्रश्नों के उत्तर लिखें ।

(2) All the parts of one question should be answered at one place in the answer-book. One complete question should not be answered at different places in the answer-book.

किसी भी एक प्रश्न के अंतर्गत पूछे गए विभिन्न प्रश्नों के उत्तर, उत्तर-पुस्तिका में अलग-अलग स्थानों पर हल करने के बजाय एक ही स्थान पर हल करें ।

(3) Attempt **five** questions, selecting at least one question each unit.

प्रत्येक इकाई से कम से कम एक प्रश्न का चयन करते हुए, कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।

UNIT – I

इकाई – I

1. (a) Prove that : $(\Delta - \nabla) = \Delta\nabla$ 4/5½

सिद्ध कीजिए : $(\Delta - \nabla) = \Delta\nabla$

(b) Prove that : 4/5½

$$u_0 + \frac{u_1 x}{1!} + \frac{u_2 x^2}{2!} + \frac{u_3 x^3}{3!} + \ldots..$$

$$= e^x \left[u_0 + x\,\Delta u_0 + \frac{x^2}{2!}\Delta^2 u_0 + \ldots.. \right]$$

सिद्ध कीजिए :

$$u_0 + \frac{u_1 x}{1!} + \frac{u_2 x^2}{2!} + \frac{u_3 x^3}{3!} + \ldots..$$

$$= e^x \left[u_0 + x\,\Delta u_0 + \frac{x^2}{2!}\Delta^2 u_0 + \ldots.. \right]$$

2. (a) Using Newton – Gregory formula for backward interpolation to find f(7.5), given 4/5½

f(1) = 1, f(2) = 8, f(3) = 27, f(4) = 64, f(5) = 125, f(6) = 216, f(7) = 343, f(8) = 512

पश्च अन्तर्वेशन के लिए न्यूटन-ग्रेगोरी सूत्र का उपयोग करते हुए, f(7.5) का मान ज्ञात कीजिए, दिया है :

f(1) = 1, f(2) = 8, f(3) = 27, f(4) = 64, f(5) = 125, f(6) = 216, f(7) = 343, f(8) = 512

(b) By means of Lagrange's formula prove that 4/5½

$$y_0 = \frac{1}{2}(y_1 + y_{-1}) - \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}(y_3 - y_1) - \frac{1}{2}(y_{-1} - y_{-3})\right]$$

लग्रांज सूत्र से सिद्ध कीजिए :

$$y_0 = \frac{1}{2}(y_1 + y_{-1}) - \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}(y_3 - y_1) - \frac{1}{2}(y_{-1} - y_{-3})\right]$$

UNIT – II

इकाई – II

3. (a) Prove that : $\mu^2 \equiv 1 + \frac{\delta^2}{4}$ 4/5½

सिद्ध कीजिए : $\mu^2 \equiv 1 + \frac{\delta^2}{4}$

(b) Use Bessel formula to find y_{25}, given that 4/5½

$$y_{20} = 24, y_{24} = 32, y_{28} = 35, y_{32} = 40$$

बेसल सूत्र का उपयोग करते हुए y_{25} ज्ञात कीजिए, दिया है :

$$y_{20} = 24, y_{24} = 32, y_{28} = 35, y_{32} = 40$$

4. (a) Evaluate $\int_{0.2}^{1.4} (\sin x - \log_e x + e^x)\, dx$ by using Simpson's 3/8 rule. 4/5½

सिम्पसन के 3/8 नियम का उपयोग करते हुए $\int_{0.2}^{1.4} (\sin x - \log_e x + e^x)\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

(b) Evaluate $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ by using Gauss three point quadrature rule. 4/5½

गॉस त्रिबिन्दु क्षेत्रकलन सूत्र द्वारा $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ का मान ज्ञात कीजिए।

UNIT – III

इकाई – III

5. (a) Find the condition so that the cubic equation $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ have two roots equal but of opposite sign. **4/5½**

प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए कि त्रिघात समीकरण $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ के दो मूल समान परन्तु विपरीत चिन्ह के हों ।

(b) Solve the equation $35x^3 - 18x^2 + 1 = 0$ by Cardon's method. **4/5½**

समीकरण $35x^3 - 18x^2 + 1 = 0$ को कार्डन की विधि से हल कीजिए ।

6. (a) Using the Bisection method, find the real root of the equation $x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$ lying in the interval [0, 1]. **4/5½**

द्विभाजन विधि का उपयोग करते हुए, अन्तराल [0, 1] में समीकरण $x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$ का वास्तविक मूल ज्ञात कीजिए ।

(b) Using method of false position, find the real root of the equation $x^3 - 2x - 5 = 0$. **4/5½**

मिथ्या-स्थिति विधि द्वारा समीकरण $x^3 - 2x - 5 = 0$ का वास्तविक मूल ज्ञात कीजिए ।

UNIT – IV

इकाई – IV

7. (a) Solve by Gauss's elimination method : **4/5½**

$$10x_1 - 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 6$$
$$-6x_1 + 8x_2 - x_3 - 4x_4 = 5$$
$$3x_1 + x_2 + 4x_3 + 11x_4 = 2$$
$$5x_1 - 9x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 7$$

गॉस विलोपन विधि से हल कीजिए :

$$10x_1 - 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 6$$
$$-6x_1 + 8x_2 - x_3 - 4x_4 = 5$$
$$3x_1 + x_2 + 4x_3 + 11x_4 = 2$$
$$5x_1 - 9x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 7$$

(b) Find the solution of the following system of equations upto fourth order approximation by Jacobi's iterative method : 4/5½

$$27x_1 + 6x_2 - x_3 = 85$$

$$6x_1 + 15x_2 + 2x_3 = 72$$

$$x_1 + x_2 + 54x_3 = 110$$

निम्न समीकरण निकाय का जैकोबी पुनरावृत्ति विधि द्वार चतुर्थ सन्निकटन तक हल ज्ञात कीजिए :

$$27x_1 + 6x_2 - x_3 = 85$$

$$6x_1 + 15x_2 + 2x_3 = 72$$

$$x_1 + x_2 + 54x_3 = 110$$

8. (a) Use Picard's method to find approximate value of y, when $x = 0.1$, given that $y = 1$, when $x = 0$ and $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$. 4/5½

पिकार्ड विधि का प्रयोग कर $x = 0.1$ के लिये y का सन्निकट मान प्राप्त कीजिए, दिया हुआ है :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}, x = 0 \text{ पर } y = 1$$

(b) Using Euler's method with step-size 0.1, find the value of y(0.5) from the following differential equation : 4/5½

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2, \ y(0) = 0$$

पद लम्बाई 0.1 लेते हुए ऑयलर विधि का प्रयोग कर निम्न समीकरण से y(0.5) का मान ज्ञात कीजिए :

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2, y(0) = 0$$

UNIT – V

इकाई – V

9. (a) Find the directional derivative of $f = xy + yz + zx$ in the direction of the vector $\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ at the point (1, 2, 0). 4/5

बिन्दु (1, 2, 0) पर $f = xy + yz + zx$ का सदिश $\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ की दिशा में दिक्-अवकलज ज्ञात कीजिए।

(b) If $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ and $\vec{a}$ and $\vec{b}$ are constant vectors, prove that 4/5

$$\vec{a} \cdot \nabla\left(\vec{b} \cdot \nabla \frac{1}{r}\right) = \frac{3(\vec{a} \cdot \vec{r})(\vec{b} \cdot \vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{r^3}$$

यदि $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ तथा $\vec{a}$ और $\vec{b}$ अचर सदिश हों, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\vec{a} \cdot \nabla\left(\vec{b} \cdot \nabla \frac{1}{r}\right) = \frac{3(\vec{a} \cdot \vec{r})(\vec{b} \cdot \vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{r^3}$$

10. (a) Use Gauss's divergence theorem to show that 4/5

$$\iint_S (x\, dydz + y\, dzdx + z\, dxdy) = 4\pi a^3$$

where the surface S is the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

गॉस अपसरण प्रमेय की सहायता से सिद्ध कीजिए कि

$$\iint_S (x\, dydz + y\, dzdx + z\, dxdy) = 4\pi a^3$$

जहाँ, सतह S, गोला $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ है।

(b) Using Stoke's theorem, evaluate 4/5

$$\int_C (xy\, dx + xy^2 dy)$$

where C is the square in the xy plane with vertices (1, 0), (–1, 0), (0, 1) and (0, –1).

स्टोक्स प्रमेय का उपयोग करके $\int_C (xy\, dx + xy^2 dy)$ का मान ज्ञात कीजिए।

जहाँ, C, xy समतल में एक वर्ग की भुजायें है जिनके शीर्ष (1, 0), (–1, 0), (0, 1) तथा (0, –1) है।
