

**B.A./B.Sc. (Part – I) Examination, 2022**

(Three Year Scheme)

(1(1)+2+3)

(Common for the Faculty of Arts and Science)

**MATHEMATICS**

**Paper-I**

**(Discrete Mathematics)**

Time : 3 Hours

Maximum Marks : 40 for Science

53 for Arts

**Note :** Attempt Five Questions in all, selecting one question from each unit.

प्रत्येक इकाई में से एक प्रश्न का चयन करते हुए, कुल पाँच प्रश्न हल करने हैं।

- (1) No supplementary answer-book will be given to any candidate. Hence the candidates should write the answer precisely in the main answer book only.

किसी भी परीक्षार्थी को पूरक उत्तर-पुस्तिका नहीं दी जायेगी। अतः परीक्षार्थियों को चाहिये कि वे मुख्य उत्तर-पुस्तिका में ही समस्त प्रश्नों के उत्तर लिखें।

- (2) All the parts of one question should be answered at one place in the answer-book. One complete question should not be answered at different places in the answer-book.

किसी भी एक प्रश्न के अंतर्गत दूछे गए विभिन्न प्रश्नों के उत्तर उत्तर-पुस्तिका में अलग-अलग स्थानों पर हल करने के बजाय एक ही स्थान पर हल करें।



## UNIT - I

### इकाई - I

1. (a) Prove by the principle of Mathematical Induction that :

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4} n^2 (n + 1)^2$$

(4/5½)

गणितीय आगमन सिद्धान्त द्वारा सिद्ध कीजिये कि :

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4} n^2 (n + 1)^2$$

- (b) How many Integers are there between 1 and 1000 which are not divisible by 2, 3, 5, or 7? <https://www.pdusuonline.com>

(4/5½)

1 तथा 1000 के मध्य ऐसे कितने पूर्णांक है जो 2, 3, 5 अथवा 7 से विभाजित नहीं होते ?

2. (a) Prove that the dual of a lattice is also a lattice.

(4/5½)

सिद्ध कीजिए कि किसी जालक का द्वैती भी एक जालक होता है।

- (b) 45 candidates appear in a competitive examination. Prove that there are at least two candidates whose role numbers differ by a multiple of 44.

(4/5½)

किसी प्रतियोगी परीक्षा में 45 परीक्षार्थी बैठते हैं। सिद्ध कीजिए कि कम से कम दो विद्यार्थी ऐसे हैं जिनके अनुक्रमांकों का अन्तर 44 का गुणक है।

## UNIT - II

### इकाई - II

3. (a) In a Boolean algebra  $\langle B, +, \cdot, ' \rangle$  prove that

$$a' + b = 1 \Leftrightarrow a + b = b; \forall a, b \in B.$$

(4/5½)

किसी बूलीय बीजगणित  $\langle B, +, \cdot, ' \rangle$  में सिद्ध कीजिए कि

$$a' + b = 1 \Leftrightarrow a + b = b; \forall a, b \in B.$$

- (b) Find the disjunctive normal form of the following Boolean functions :

$$f(x_1, x_2, x_3) = [(x_1' + x_2') + (x_1' + x_3')] + x_2 \cdot x_3$$

(4/5½)

निम्नलिखित बूलीय फलन का वियोजी प्रसामान्य रूप ज्ञात कीजिए :

$$f(x_1, x_2, x_3) = [(x_1' + x_2') + (x_1' + x_3')] + x_2 \cdot x_3$$

4. (a) If  $m$  is a positive integer then for integers  $a$  and  $b$ ,  $a \equiv b \pmod{m}$  if and only if  $a$  and  $b$  leave the same remainder when divided by  $m$ . (4/5½)  
यदि  $m$  एक धनात्मक पूर्णांक है तब पूर्णाकों  $a$  और  $b$  के लिये  $a \equiv b \pmod{m}$  यदि और केवल यदि  $a$  तथा  $b$  को  $m$  द्वारा विभाजित किये जाने पर प्राप्त शेषफल समान होते हैं।
- (b) Show that 2 is a primitive root Modulo 9. (4/5½)  
प्रदर्शित कीजिए कि धनात्मक पूर्णांक 2 धनात्मक पूर्णांक 9 के सापेक्ष आद्य मूल है।

**UNIT - III**  
**इकाई - III**

5. (a) Show that the statement  $[(p \rightarrow q) \rightarrow p] \rightarrow p$  is a tautology. (4/5½)  
प्रदर्शित कीजिए कि प्रकथन  $[(p \rightarrow q) \rightarrow p] \rightarrow p$  एक पुनरुक्ति है।
- (b) Determine the numeric function corresponding to the following generating function : (4/5½)

$$G(x) = \frac{1+x^3}{(1-x)^4}$$

निम्नलिखित जनक फलन के संगत संख्यांक फलन ज्ञात कीजिये :

$$G(x) = \frac{1+x^3}{(1-x)^4}$$

6. (a) Find the Solution of the following recurrence relations : (4/5½)  
 $a_r - 6a_{r-1} + 9a_{r-2} = r \cdot 3^r$   
निम्नलिखित पुनरावृत्ति सम्बन्ध के हल ज्ञात कीजिये :  
 $a_r - 6a_{r-1} + 9a_{r-2} = r \cdot 3^r$
- (b) Show that  $(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q) \Leftrightarrow p \vee q$  (4/5½)  
प्रदर्शित कीजिए कि :  
 $(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q) \Leftrightarrow p \vee q$

**UNIT - IV**  
**इकाई - IV**

7. (a) Prove that the sum of the degrees of all the vertices in a graph is equal to twice the number of edges in the graph. (4/5½)  
सिद्ध कीजिए कि किसी ग्राफ में उसके सभी शीर्षों की कोटियों का योगफल, ग्राफ में उपस्थित कोरों की संख्या का दो गुना होता है।

- (b) Prove that if  $G = (V, E)$  is a connected graph, then  $G$  is bipartite if and only if  $G$  contain no odd cycle. (4/5)

सिद्ध कीजिए कि यदि  $G = (V, E)$  एक सम्बद्ध ग्राफ है, तब  $G$  द्विखण्डी है यदि और केवल यदि  $G$  में कोई विषम चक्र नहीं है।

8. (a) Prove that complete bipartite graph  $K_{3,3}$  is non-planar. (4/5)

सिद्ध कीजिए कि पूर्ण द्विखण्डी ग्राफ  $K_{3,3}$  असमतलीय है।

- (b) A plane simple graph has 30 vertices each of degree 3. In how many regions can this graph be partitioned? (4/5)

किसी समतलीय सरल ग्राफ में 30 शीर्ष हैं तथा प्रत्येक शीर्ष की कोटि 3 है। समतलीय ग्राफ को कितने पार्श्वों (क्षेत्रों) में विभाजित किया जा सकता है ?

### UNIT - V

#### इकाई - V

9. (a) Prove that a Tree with  $n$  vertices has exactly  $(n-1)$  edges. (4/5)

सिद्ध कीजिए कि  $n$  शीर्षों पर प्रत्येक वृक्ष में यथार्थतः  $n-1$  कोरें होती हैं।

- (b) Prove that if  $h$  is the height of a balanced complete binary Tree on  $n$  vertices, then

$$h = \log_2 \frac{(n+1)}{2}$$

(4/5)

सिद्ध कीजिए कि यदि  $n$  शीर्षों के संतुलित पूर्ण द्विचर वृक्ष की ऊँचाई  $h$  है, तब

$$h = \log_2 \frac{(n+1)}{2}$$

10. (a) Prove that A graph  $G$  is connected if and only if it has a spanning tree. (4/5)

सिद्ध कीजिए कि ग्राफ  $G$  एक सम्बद्ध ग्राफ होता है यदि और केवल यदि  $G$  का एक जनक वृक्ष है।

- (b) Prove that Every tree has either one or two centres.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक वृक्ष का एक अथवा दो केन्द्र होते हैं। (4/5)