

B.A./B.Sc. (Part – I) Examination, 2022

(Three - Year Scheme)

(10+2+3)

(Common for the Faculties of Arts and Science)

MATHEMATICS**Paper-III****(ANALYTIC GEOMETRY AND OPTIMIZATION THEORY)**

Time : 3 Hours

Maximum Marks : 40 for Science

54 for Arts

- Note :** (1) No supplementary answer-book will be given to any candidate. Hence the candidates should write the answer precisely in the main answer book only.
किसी भी परीक्षार्थी को पूरक उत्तर-पुस्तिका नहीं दी जायेगी। अतः परीक्षार्थियों को चाहिये कि वे मुख्य उत्तर-पुस्तिका में ही सम्स्त प्रश्नों के उत्तर लिखें।
- (2) All the parts of one question should be answered at one place in the answer-book. One complete question should not be answered at different places in the answer-book.
किसी भी एक प्रश्न के अंतर्गत पूछे गए विभिन्न प्रश्नों के उत्तर उत्तर-पुस्तिका में अलग-अलग स्थानों पर हल करने के बजाय एक ही स्थान पर हल करें।
- (3) Attempt Five Questions in all, selecting one question from each unit.
प्रत्येक इकाई में से एक प्रश्न का चयन करते हुए, कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के अंक अंकित हैं।



UNIT - I

इकाई - I

1. (a) Show that the equation :

$$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta \text{ and } \frac{l}{r} = -1 + e \cos \theta \text{ represent the same conic.} \quad (4/5\frac{1}{2})$$

प्रदर्शित कीजिए कि समीकरण $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ तथा $\frac{l}{r} = -1 + e \cos \theta$ एक ही शंकु को निरूपित करते हैं।

- (b) Find the gradient (slope) of tangent line at ' α ' of the conic $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$. (4/5\frac{1}{2})

शंकु $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ के बिन्दु ' α ' पर स्पर्श-रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

2. (a) Find the condition that the straight line $\frac{l}{r} = A \cos \theta + B \sin \theta$ may touch the circle

$$r = 2a \cos \theta.$$

(4/5\frac{1}{2})

वह प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए जबकि सरल रेखा $\frac{l}{r} = A \cos \theta + B \sin \theta$, वृत्त $r = 2a \cos \theta$ को स्पर्श करे।

- (b) Find the polar equation of chord of contact of tangents drawn from the point $P(r_1, \theta_1)$ to the conic $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$.

(4/5\frac{1}{2})

बिन्दु $P(r_1, \theta_1)$ से शंकु $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ पर खींची गई स्पर्श-रेखाओं की स्पर्श जीवा की ध्रुवीय समीकरण ज्ञात कीजिए।

UNIT - II

इकाई - II

3. (a) If a sphere passes through origin $(0, 0, 0)$, meets the coordinate axes in A, B, C and whose radius is constant $2K$, then prove that the locus of centroid of tetrahedron OABC is $x^2 + y^2 + z^2 = K^2$. (4/5½)

यदि एक गोला मूल बिन्दु $(0, 0, 0)$ से गुजरता है, निर्देशाक्षों को A, B, C पर मिलता है तथा जिसकी त्रिज्या अक्षर $2K$ है तो सिद्ध करो कि चतुष्फलक OABC के केन्द्रक का बिन्दुपथ $x^2 + y^2 + z^2 = K^2$ होगा।

- (b) Find the equation of the sphere that passes through the circle $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y - 4z + 6 = 0$, $3x - 4y + 5z - 15 = 0$ and cuts the sphere $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z + 11 = 0$ orthogonally. <https://www.pdsuonline.com> (4/5½)

वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y - 4z + 6 = 0$, $3x - 4y + 5z - 15 = 0$ से होकर गुजरने वाले उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जो गोले $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z + 11 = 0$ को लाम्बिक रूप से काटता है।

4. (a) Find the enveloping cone of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y = 2$ with vertex at $(1, 1, 1)$. (4/5½)

गोले $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y = 2$ के उस अन्वालोपी शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष बिन्दु $(1, 1, 1)$ है।

- (b) Find the condition that the cone $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$ may have three mutually perpendicular generators. (4/5½)

वह प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए कि शंकु $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$ की तीन परस्पर समकोणिक जनक रेखाएँ हों।

UNIT - III

इकाई - III

5. (a) Find the equation of a cylinder whose generators are parallel to the line $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ and base is the curve $x^2 + y^2 + z^2 + 2gx + 2fy + c = 0, z = 0$. (4/5½)

उस बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिनकी जनक रेखाएँ $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ के समान्तर हैं तथा आधार

वक्र $x^2 + y^2 + z^2 + 2gx + 2fy + c = 0, z = 0$ है।

- (b) Find the equation of the right circular cylinder whose guiding circle is $x^2 + y^2 + z^2 = 9; x - y + z = 3$. (4/5½)

उस लम्बवृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका निर्देशक वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 = 9,$

$x - y + z = 3$ है।

6. (a) Find the equation to the tangent planes to the conicoid $2x^2 - 6y^2 + 3z^2 = 5$, which pass through the line $x + 9y - 3z = 0 = 3x - 3y + 6z - 5$. (4/5½)

रेखा $x + 9y - 3z = 0 = 3x - 3y + 6z - 5$ से जाने वाले तथा शांकवज $2x^2 - 6y^2 + 3z^2 = 5$ को स्पर्श करने वाले स्पर्श तलों का समीकरण ज्ञात कीजिए।

- (b) Find the equations of the normal at the point $P(x_1, y_1, z_1)$ of the ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (4/5½)$$

दीर्घवृत्तक $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ के बिन्दु $P(x_1, y_1, z_1)$ पर अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात कीजिए।

UNIT - IV

इकाई - IV

7. (a) Find the equations to the generating lines of the hyperboloid $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$ which pass through the point $(2, -1, \frac{4}{3})$. (4/5½)

अतिपरवलयज $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$ के बिन्दु $(2, -1, \frac{4}{3})$ से गुजरने वाली जनक रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए।

- (b) Prove that the plane through two intersecting generators is the tangent plane of hyperboloid of one sheet at their common point. (4/5½)

सिद्ध कीजिए कि दो प्रतिच्छेदी जनकों से जाने वाला समतल एक पृष्ठीय अतिपरवलयज को प्रतिच्छेदित बिन्दु पर स्पर्श करता है।

8. (a) Find the principal planes and principal directions of the following conicoid : (4/5½)

निम्न शंकुबद्ध की मुख्य दिशाएँ एवं मुख्य समतल ज्ञात कीजिए :

$$8x^2 + 7y^2 + 3z^2 - 8yz + 4zx - 12xy + 2x - 8y + 1 = 0.$$

- (b) Reduce the following equation to the standard form : (4/5½)

निम्न समीकरण का मानक रूप में समानबन्धन कीजिए :

$$2x^2 - 7y^2 + 2z^2 - 10yz - 8zx - 10xy + 6x + 12y - 6z + 5 = 0.$$

UNIT - V

इकाई - V

9. (a) Show that the following set is convex set :

प्रदर्शित कीजिए कि निम्न समुच्चय अवमुख समुच्चय है :

$$S = \{x / x = (x_1, x_2, x_3) ; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$$

(4/5)

- (b) Find all the basic solutions for the following equations :

निम्न समीकरणों के सभी आधारी हल ज्ञात कीजिए :

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 10, \quad x_1 + 2x_2 - x_3 = 8$$

(4/5)

10. (a) Solve the dual of the following problem :

निम्नलिखित समस्या की द्वैती समस्या को हल कीजिए :

(4/5)

min. (निम्नतम करो) $z = 15x_1 + 10x_2$

s.t. (प्रतिबन्ध) $3x_1 + 5x_2 \geq 5$

$$5x_1 + 2x_2 \geq 3$$

and (तथा) $x_1, x_2 \geq 0$

(b) Prove that the dual of the dual of a primal problem is the primal.

(4/5)

सिद्ध कीजिए कि किसी आद्य समस्या के द्वैती की द्वैती, आद्य समस्या होती है।