राजस्थान विश्वविद्यालय परीक्षा प्रश्न-पत्र, 2017

B.Sc. (Part II) Examination, 2017

(Common for the Faculties of Arts and Science)

[Also Common with subsidiary Paper of B.A./B.Sc. (Hons.) Part II]

(Three–Year Scheme of 10 + 2 + 3 Pattern)

MATHEMATICS

First Paper

(Real Analysis and Metric Space)

Time Allowed : Three Hours **Maximum Marks :** 66 for Arts
50 for Science

Attempt FIVE questions in all, selecting ONE question from each Unit.
प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न का चयन करते हुये, कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिये।

Write your roll number on question paper before start writing answers of questions.
प्रश्नों के उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न पत्र पर रोल नम्बर अवश्य लिखें।

UNIT - I / इकाई - I

1. (a) Define complete ordered field and prove that closed interval [a,b] is closed set. 1+4, 1+6
पूर्ण क्रमित क्षेत्र को परिभाषित कीजिए एवं सिद्ध कीजिए कि संवृत्त अन्तराल [a,b] संवृत्त समुच्चय होता है।

   (b) Define compact set and prove that no open interval (a,b) is compact.
संहत समुच्चय को परिभाषित कीजिए एवं सिद्ध करो कि कोई भी विवृत अन्तराल संहत नहीं है।

2. (a) Prove that every bounded sequence has at least one limit point. 5,7
सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिबद्ध अनुक्रम का कम–से–कम एक सीमा बिन्दु होता है।

   (b) Prove that the sequence $\left\{n^{1/n}\right\}$ converges to 1.

   सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\left\{n^{1/n}\right\}$ को अभिसृत होती है।

UNIT-II इकाई-II

3. (a) A sequence of real numbers is convergent if it is a cauchy sequence. 5,7
एक वास्तविक संख्याओं की अनुक्रम अभिसारी है। यदि और केवल यदि यह कोशी अनुक्रम है।

   (b) If a function f is continuous on [a,b] then prove that it is bounded in that interval. 5,7
यदि फलन f संवृत-अन्तराल [a,b] में संतत है तो सिद्ध कीजिए की वह उस अन्तराल में परिबद्ध होता है।

4. (a) If a function f is differentiable in closed interval [a,b] and k be a number between $f(a)$ and $f(b)$, then there exists a number c so that $f'(c) = k$ 5,7
यदि फलन f संवृत अन्तराल [a,b] में अवकलनीय है और $f(a)$ तथा $f(b)$ के मध्य कोई भी संख्या k है, तो अन्तराल में [a,b] में एक ऐसा बिन्दु c विद्यमान है ताकि $f'(c) = k$

   (b) State and prove the Rolle's theorem. 1+4,2+5
रोल प्रमेय का कथन दीजिए एवं रोल प्रमेय को सिद्ध कीजिए।

UNIT - III / इकाई - III

5. (a) Prove that the following function $f(x,y)$ is not continuous at (0,0): 5,7

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x-y}, & if\ x\neq y\\ 0, & if\ x=y\end{cases}$$

सिद्ध कीजिए कि निम्न फलन $f(x,y)$ बिन्दु (0,0) पर सांतत्य नहीं है:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x-y}, & यदि\ x\neq y\\ 0, & यदि\ x=y\end{cases}$$

   (b) The lower R-integral cannot exceed, the upper R-integral of any bounded function i.e. 5,7

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^{\bar{b}} f(x)dx$$

किसी परिबद्ध फलन का निम्न R- समाकल, उपरि R- समाकल से बड़ा नहीं हो सकता है, अर्थात्

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^{\bar{b}} f(x)dx$$

6. (a) Let f be a continuous function defined on [a,b], prove that f is R-integrable over [a,b] i.e. $f \in R[a,b]$. 5,7
यदि फलन f, $[a,b]$ में संतत है, तो सिद्ध कीजिए कि यह संवृत अन्तराल [a,b] पर R-समाकलनीय होगा।

   (b) If $f \in R[a,b]$, then prove that $|f| \in R[a,b]$ 5,7
यदि $f \in R[a,b]$ तो सिद्ध कीजिए कि $|f| \in R[a,b]$

rtuonline.com

UNIT -IV / इकाई - IV

7. (a) Define uniform convergence of series. Prove that the following series is not uniform convergent. 1+4, 2+5
श्रेणी का एक समान अभिसरण को परिभाषित कीजिए एवं सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित श्रेणी एक समान अभिसारी नहीं है।

$\left\{\frac{nx}{1+n^2x^2}\right\}, 0 \le x \le 1$

(b) Test for term-wise integration, the series for which the sum of first n terms is: 5,7

उस श्रेणी का पदशः समाकलन का परीक्षण करो जिसके प्रथम n पदों का योग

$S_n x = nxe^{-nx^2}, 0 \le x \le 1$

8. (a) Let (X,d) be a metric space and A is a non-empty subset of X. Then prove that 5,7

माना कि (X,d) एक दूरीक समष्टि हैं एवं A, X का एक अरिक्त समुच्चय है, तो सिद्ध कीजिए कि

$|d(x;A) - d(y,A)| \le d(x,y) \forall x, y \in A$

(b) In a metric space, the intersection of a finite number of open sets is open. 5,7

एक दूरीक समष्टि में विवृत समुच्चयों का प्रत्येक परिमित सर्वनिष्ठ निर्धारण एक विवृत समुच्चय होता है।

UNIT - V / इकाई - V

9. (a) Let (X_1, d_1) and (X_2, d_2) be two metric space. For any pair of points $x=(x_1, x_2)$ $y=(y_1, y_2)$ of $X_1 \times X_2$ defined by setting $d(x,y) = \sqrt{\{d_1^2(x_1,y_1) + d_2^2(x_2;y_2)\}} \forall x_1, y_1 \in X_1$ and $x_2, y_2 \in X_2$ .Then prove that d is a metric space for $X=X_1 \times X_2$. 5,7

माना कि (X_1,d_1) तथा (X_2, d_2) कोई दो दूरीक समष्टियाँ हैं। $X_1 \times X_2$ के किन्हीं क्रमित युग्मों $x=(x_1, x_2)$ $y=(y_1, y_2)$ के लिए एक दूरीक समष्टि d निम्न प्रकार से परिभाषित है

$d(x.y) = \sqrt{\{d_1^2(x_1,y_1) + d_2^2(x_2,y_2)\}} \forall x_1, y_1 \in X_1$ एवं $x_2, y_2 \in X_2$ तो सिद्ध कीजिए कि $X=X_1 \times X_2$ के लिये d दूरीक होगी।

(b) Every convergent sequence in a metric space is a cauchy sequence but its converse is not necessarily true. ,7

दूरीक समष्टि में प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम एक कोसी अनुक्रम होता है, परन्तु इसका विलोम सत्य होना आवश्यक नहीं है।

10. (a) Every complete metric space is of second category as subset of itself. 5,7

प्रत्येक पूर्व दूरीक समष्टि स्वयं का उपसमुच्चय मानते हुए द्वितीय संवर्ग का होता है।

(b) Prove that any continuous image of a connected space is connected.

सिद्ध कीजिए कि किसी संबद्ध दूरीक समष्टि का किसी दूरीक समष्टि में एक संतत प्रतिचित्रण के अन्तर्गत दूरीक समष्टि का प्रतिबिम्ब संबद्ध होता है।