राजस्थान विश्वविद्यालय परीक्षा प्रश्न-पत्र, 2017

B.A./B.Sc. (Part I) Examination, 2017

(Common for the Faculties of Arts and Science)

[Also Common with Subsidiary Paper of B.A./B.Sc.(Hons.)Part I]

(Three–Year Scheme of 10 + 2 + 3 Pattern)

MATHEMATICS

FIRST PAPER

(Discrete Mathematics)

Time Allowed : Three Hours **Maximum Marks :** 50 for Science

rtuonline.com 66 for arts

Write your roll number on question paper before start writing answers of questions.

प्रश्नों के उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न पत्र पर रोल नम्बर अवश्य लिखें।

Attempt All questions in all, selecting one question from each Unit.

प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न का चयन करते हुये, कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिये।

UNIT - I / इकाई - I

1. (a) If A, B_1, B_2, ..., B_n are sets, then prove that $A-\bigcup_{i=1}^{n} B_i=\bigcup_{i=1}^{n}(A-B_i)$ 3,4

rtuonline.com

यदि A, B_1, B_2, ..., B_n समुच्चय हैं, तब सिद्ध कीजिये कि

$$A-\bigcup_{i=1}^{n} B_i=\bigcup_{i=1}^{n}(A-B_i)$$

(b) 100 students were asked whether they had taken courses in any of the three subjects, Mathematics, Computer Science and Statistics. The results were given below: 45 had taken Mathematics; 18 had taken Mathematics and Computer Science; 38 had taken Computer Science; 21 had taken Statistics; 9 had taken Mathematics and Statistics; 4 had Computer Science and Statistics and 23 had taken no courses in any of these subjects. Draw a Venn diagram that will show the results of the Survey.

100 विद्यार्थियों के एक सर्वे में पूछा गया कि क्या उन्होंने गणित, कम्प्यूटर विज्ञान तथा सांख्यिकी विषयों में से किसी भी विषय का कोर्स के रूप में चयन किया है? परिणाम निम्नलिखित था : 45 विद्यार्थियों ने गणित; 18 विद्यार्थियों ने गणित एवं कम्प्यूटर विज्ञान; 38 विद्यार्थियों ने कम्प्यूटर विज्ञान; 21 विद्यार्थियों ने सांख्यिकी; 9 विद्यार्थियों ने गणित एवं सांख्यिकी; 4 विद्यार्थियों ने कम्प्यूटर विज्ञान एवं सांख्यिकी तथा 23 विद्यार्थियों ने इन विषयों में से कोई भी विषय नहीं लिया। वेन आरेख द्वारा सर्वे के परिणाम को दर्शाइये।

(c) Use principle of mathematical induction to prove that:

$$1.2+2.3+\text{............}+n\,(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

गणितीय आगमन सिद्धान्त का प्रयोग करते हुये सिद्ध कीजिये कि:

$$1.2+2.3+\text{............}+n\,(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

2. (a) Let R and S be two relations from the set A to the set B. Show that: 3,4

(i) $(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$

(ii) $(R\cup S)^{-1}=R^{-1}\cup S^{-1}$

माना R तथा S समुच्चय A से समुच्चय B में कोई दो संबंध हैं। प्रदर्शित कीजिये:

(i) $(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$

(ii) $(R\cup S)^{-1}=R^{-1}\cup S^{-1}$ rtuonline.com

(b) Define extremal elements in a Poset. Prove that every finite nonempty poset $(A,\leq)$ has a minimal element. 3,4

पोसैट में चरम अवयवों की परिभाषा दीजिये। सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक परिमित अरिक्त पौसेट $(A,\leq)$ का एक निम्नतम अवयव होता है।

(c) Seven members of family have a total Rs. 2886 in their pockets. Show that at least one of them must have at least Rs. 416 in his pocket.

किसी परिवार के सात सदस्यों के पास कुल Rs. 2886 हैं। प्रदर्शित कीजिये कि उनमें से कम से कम एक सदस्य के पास कम से कम Rs. 416 होंगे।

rtuonline.com

UNIT - II / इकाई - II

3. (a) If $(B,\leq)$ is a distributive lattice, then prove that for all elements a, b, c $\in$ B $(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)=(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\wedge a)$. 4,5½

यदि $(B,\leq)$ एक बंटनात्मक जालक है, तब सभी अवयवों a, b, c $\in$ B के लिये सिद्ध कीजिये कि $(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)=(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\wedge a)$.

(b) Find the disjunctive normal form of the following Boolean function. 4,5½

$$f(x_1,x_2,x_3)=((x_1x_2)'x_3)'((x_1'+x_3)(x_2'+x_3'))'$$

निम्नलिखित बूलीय फलन का वियोजी प्रसामान्य रूप ज्ञात कीजिये:

$$f(x_1,x_2,x_3)=((x_1x_2)'x_3)'((x_1'+x_3)(x_2'+x_3'))'$$

4. (a) Prove that every integer $n\geq 2$ either is a prime or can be expressed as a product of primes uniquely. 4,5½

सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक पूर्णांक $n\geq 2$ या तो एक अभाज्य पूर्णांक होता है अथवा इसे अभाज्य पूर्णांकों के गुणनफल के रूप में अद्वितीय रूप से व्यक्त किया जा सकता है।

(b) Define Euler's-phi function. Prove that a positive integer p is a prime if and only if $\phi(p)=p-1$. 4,5½

आयलर–फाइ फलन की परिभाषा दीजिये। सिद्ध कीजिये कि धनात्मक पूर्णांक p एक अभाज्य पूर्णांक है यदि और केवल यदि $\phi(p)=p-1$.

5. (a) Show that:

$$p\to(q\to r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\to(q\to r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\to r$$ 4,5½

प्रदर्शित कीजिये कि:

(b) Use the method of indirect proof to show that if α^2 is an even integer then α is an even integer. 4,5½

rtuonline.com

अप्रत्यक्ष उपपत्ति का प्रयोग करते हुए प्रदर्शित कीजिये कि यदि α^2 एक सम पूर्णांक है, तो α भी एक सम पूर्णांक है।

6. (a) Find the numeric function corresponding to the following generating function: 2,3

$$G(x)\frac{6-29x}{1-11x+30x^2}$$

जनक फलन $G(x)\frac{6-29x}{1-11x+30x^2}$ के संगत संख्यांक फलन ज्ञात कीजिये।

(b) (i) Solve the following recurrence relation: 3,4

$$a_{r+2}-5a_{r+1}+6a_r=5r; r\geq 0$$

निम्न पुनरावृत्ति संबंध का हल ज्ञात कीजिये:

$$a_{r+2}-5a_{r+1}+6a_r=5r; r\geq 0$$

(ii) Solve the following recurrence relation by the method of generating functions: 3,4

$$a_{r+2}-3a_{r+1}+2a_r=0; r\geq 0, a_0=2, a_1=3$$

निम्न पुनरावृत्ति संबंध का हल जनक फलनों की विधि द्वारा ज्ञात कीजिये:

$$a_{r+2}-3a_{r+1}+2a_r=0; r\geq 0, a_0=2, a_1=3$$

UNIT - IV / इकाई - IV

7. (a) Let G be an undirected graph with 12 edges. If G has 6 vertices each of degree 3 and the rest vertices have degree less than 3, then what is the minimum number of vertices G can have? 4,5

माना G एक अदिष्ट ग्राफ है जिसमें 12 कोरें हैं। यदि G में 6 शीर्ष प्रत्येक 3 कोटि के हैं तथा शेष अन्य शीर्षो की कोटि 3 से कम है तो बताइये कि ग्राफ G में कम से कम कितने शीर्ष हैं?

(b) Prove that a connected graph G contains an Eulerian path if and only if it has exactly two vertices of odd degree.

सिद्ध कीजिये कि संबंद्ध ग्राफ G में एक ऑयलरी पथ होता है यदि और केवल यदि G में यथार्थतः दो शीर्ष विषम कोटि के हैं।

8. (a) Let G be a connected graph on n vertices and e edges. Prove that G has a Hamiltonian path if.

$$e\geq\frac{1}{2}(n^2-3n+6)$$

माना, G एक संबंद्ध ग्राफ है जिसमें n शीर्ष तथा e कोरें हैं। सिद्ध कीजिये कि G में एक हैमिल्टोनियन पथ है यदि

$$e\geq\frac{1}{2}(n^2-3n+6)$$

(b) If every region of a simple planar graph on v vertices and e edges embeded in a plane is bounded by k-edges, then show that $e=\frac{k(n-2)}{k-2}$ 4,5

यदि n शीर्षों तथा e कोरों वाले किसी समतलीय ग्राफ का प्रत्येक क्षेत्र k- कोरों द्वारा घिरा है, तो प्रदर्शित कीजिये कि $e = \frac{k(n-2)}{k-2}$

rtuonline.com

UNIT - V / इकाई - V

9. (a) A tree T has n_1 vertices of degree 1. n_2 vertices of degree 2. n_3 vertices of degree 3, ..., n_k vertices of degree k. Prove that $n_1 = 2 + n_3 + 2n_4 + 3n_5 + ... + (k-2)\, n_k$.

किसी वृक्ष T में n_1 शीर्षों की कोटि 1, n_2 शीर्षों की कोटि 2, n_3 शीर्षों की कोटि 3, ..., n_k शीर्षों की कोटि k है। सिद्ध कीजिये कि:

$n_1 = 2 + n_3 + 2n_4 + 3n_5 + ... + (k-2)\, n_k$.

(b) Let G be a graph with k components, where each component is a tree. If there are n vertices and e edges in G then prove that n = e + k. 4,5

माना k घटकों वाले किसी ग्राफ G में n शीर्ष तथा e कोरें हैं जहाँ प्रत्येक घटक एक पौधा है। सिद्ध कीजिये कि n = e + k.

10.(a) Define out-degree and in-degree of a vertex in a digraph. Prove that in a digraph G, the sum of all in-degrees is equal to the sum of all out-degrees. 4,5

दिष्ट ग्राफ में किसी शीर्ष की बाह्य–कोटि तथा अन्तः कोटि की परिभाषा दीजिये। सिद्ध कीजिये कि दिष्ट ग्राफ G में समस्त अन्तः कोटियों का योगफल समस्त बाह्य कोटियों के योग फल के बराबर होता है।

(b) Define incidence matrix of a digraph. Draw the digraph, whose incidence matrix is shown below: 4,5

$$\begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

दिष्ट ग्राफ में आपतन आव्यूह की परिभाषा दीजिये। निम्न आपतन आव्यूह वाले दिष्ट ग्राफ की रचना कीजिये:

$$\begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$