

This question paper contains 4 printed pages.

Roll No.

B.A./B.Sc./ (Pt. I)

Maths.-II

159-II

B.A./B.Sc./B.Ed. (Part-I) EXAMINATION, 2019

(Common for the Faculties of Arts and Science)

[Also Common with Subsidiary Paper of B.A./B.Sc. (Hons.) Part-I]

(Three-Year Scheme of 10+2+3 Pattern)

MATHEMATICS - II

(Calculus)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 40 for Science
: 54 for Arts

Attempt Five questions in all, selecting ONE question from each Unit. All questions carry equal marks.

प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न का चयन करते हुये, कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Write your roll number on question paper before start writing answer of questions.

प्रश्नों के उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न-पत्र पर रोल नम्बर अवश्य लिखें।

UNIT-I/इकाई-I

1.

(a) Show that the series

$$\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots \dots \dots \text{ is conditionally convergent.}$$

प्रदर्शित कीजिए कि श्रेणी

$$\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots \dots \dots \text{ सह-प्रतिबन्ध अभिसारी है।}$$

(b) Test the convergence of the following series :

निम्न श्रेणी के अभिसरण की जाँच कीजिए :

$$\frac{a}{b} + \frac{a(a+1)}{b(b+1)} + \frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)} + \dots$$

2.

(a) Find the power series expansion of $\sin x$.

$\sin x$ का घात श्रेणी प्रसार कीजिए।

(b) State and prove Taylor's Theorem with Cauchy's form of remainder.

कोशी रूप का शेषफल वाला टेलर प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

UNIT-II /इकाई-II

3.

(a) Find the pedal equation of the parabola $y^2 = 4a(x + a)$.

पदवलय $y^2 = 4a(x + a)$ का पदिक समीकरण ज्ञात कीजिए।

(b) Show that the radius of curvature at a point $(a \cos^3 \theta, a \sin^3 \theta)$ on the curve

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \text{ is } \frac{3a}{2} \sin 2\theta.$$

सिद्ध कीजिए कि वक्र $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ के बिन्दु $(a \cos^3 \theta, a \sin^3 \theta)$ पर वक्रता त्रिज्या $\frac{3a}{2} \sin 2\theta$ होती है।

4.

(a) If $u = \tan^{-1} \frac{x^3 + y^3}{x + y}$, then prove that

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u.$$

यदि $u = \tan^{-1} \frac{x^3 + y^3}{x + y}$, तब सिद्ध कीजिए कि

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$$

(b) If $y^x + x^y = C$, then find the value of $\frac{dy}{dx}$.

यदि $y^x + x^y = C$, तब $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए।

UNIT-III /इकाई-III

5.

(a) Find the envelope of the straight lines, $y = mx + \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$, where m is the parameter.

सरल रेखा $y = mx + \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$, का अन्वलोप ज्ञात कीजिए, जहाँ m प्राचल है।

(b) Show that $u = x^3 y^2 (1-x-y)$ is maximum at $x = 1/2, y = 1/3$.

प्रदर्शित कीजिए कि $u = x^3 y^2 (1-x-y)$ $x = 1/2, y = 1/3$ पर उच्चिष्ठ है।

6.

(a) Show that the four asymptotes of the curve $xy(x^2 - y^2) + 25y^2 + 9x^2 - 144 = 0$ cut it again in eight points lying on an ellipse whose eccentricity is $4/5$.

सिद्ध कीजिए कि वक्र $xy(x^2 - y^2) + 25y^2 + 9x^2 - 144 = 0$ के चारों अनन्तस्पर्शी वक्र को फिर आठ बिन्दुओं में काटता है जो $4/5$ उत्केन्द्रता वाले दीर्घवृत्त पर स्थित है।

(b) Trace the following curve :

निम्न वक्र का अनुरेखण कीजिए :

$$r = a(1 - \cos \theta)$$

UNIT-IV /इकाई-IV

7.

(a) Show that

दर्शाए कि:

$$\Gamma(m) \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}} \Gamma(2m) ; m \in \mathbb{Z}$$

where m is positive.

जहाँ m धनात्मक है।

(b) Find the value of $\iiint \log(x+y+z) dx dy dz$, the integral extending over all positive values of x, y, z subject to the condition $x+y+z < 1$.

समाकल $\iiint \log(x+y+z) dx dy dz$, का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ x, y, z सभी धनात्मक तथा $x+y+z < 1$ है।

8.

(a) Evaluate the following integral by changing its order :

निम्न समाकल का क्रम बदलकर मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\infty} \int_x^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dx dy.$$

(b) Evaluate :

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^a x^2 (a^2 - x^2)^{1/2} dx.$$

UNIT-V /इकाई-V

9.

(a) Find the whole area of the lemniscate $r^2 = a^2 \cos 2\theta$.

लैमनिस्केट $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ का सम्पूर्ण क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(b) Find the surface area of the solid formed by the revolution of the cardioid $r = a(1 + \cos \theta)$ about the initial line.

कार्डिऑइड $r = a(1 + \cos \theta)$ को प्रारम्भिक रेखा के सापेक्ष घुमाने से बने ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

10.

(a) Find the volume of the solid generated by the revolution of the curve $(a - x) y^2 = a^2 x$ about its asymptote.

वक्र $(a - x) y^2 = a^2 x$ को उसकी अन्तःस्पर्शी के चारों ओर घुमाने से जनित ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।

(b) Prove that the length of the arc from the vertex to any point on the cycloid $x = a(\theta + \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ is $\sqrt{8ay}$. Also prove that whole length of an arc of the curve is $8a$.

सिद्ध कीजिए कि साइक्लाइड

$$x = a(\theta + \sin \theta), y = a(1 - \cos \theta).$$

के शीर्ष से लेकर इस पर किसी बिन्दु तक के चाप की लम्बाई $\sqrt{8ay}$ है। यह भी सिद्ध कीजिए कि वक्र के एक महाराज की सम्पूर्ण लम्बाई $8a$ है।
