B.A./B.Sc. (PART-III) EXAMINATION, 2017

(Common for the Faculties of Arts and Science)

[Also Common with Subsidiary Paper of B.A./B.Sc. (Hons.) Part III]

(Three-Year Scheme of 10+2+3 Pattern)

MATHEMATICS - II

(Complex Analysis)

Time Allowed : Three Hours — Maximum Marks : 50 for Science, 66 for Arts

किसी भी परीक्षार्थी को पूरक उत्तर-पुस्तिका नहीं दी जायेगी। अतः परीक्षार्थियों को चाहिये कि वे मुख्य उत्तर-पुस्तिका में ही समस्त प्रश्नों के उत्तर लिखें।

किसी भी एक प्रश्न के अन्तर्गत पूछे गए विभिन्न प्रश्नों के उत्तर, उत्तर-पुस्तिका में अलग-अलग स्थानों पर हल करने के बजाय एक ही स्थान पर हल करें।

प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न का चयन करते हुए, कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिये।

प्रश्नों के उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न पत्र पर रोल नम्बर अवश्य लिखें।

UNIT-I/इकाई-I

1. (a) Show that polar form of Cauchy Riemann equations is $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$ and $\frac{\partial u}{\partial \theta}=-r\frac{\partial v}{\partial r}$. Where $f(z)=u+iv$ is an analytic function. 5

प्रदर्शित कीजिए कि कौशी-रीमान समीकरणों का ध्रुवी रूप $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$ और $\frac{\partial u}{\partial \theta}=-r\frac{\partial v}{\partial r}$ है। जहाँ $f(z)=u+iv$ एक विश्लेषिक फलन है।

(b) Prove that $f(z)=\bar{z}$ is not differentiable at any point. 5

सिद्ध कीजिए कि $f(z)=\bar{z}$ किसी भी बिन्दु पर अवकलनीय नहीं है।

2. (a) If $f(z) = u + iv$ is an analytic function of $z = x+iy$ and $u-v=\frac{\cos x+\sin x-e^{-y}}{2\cos x-e^{y}-e^{-y}}$. Show that $f(z)$ subject to condition $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ is $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cot\left(\frac{z}{2}\right)$.

यदि $f(z)=u+iv$ $z=x+iy$ का विश्लेषिक फलन है और $u-v=\frac{\cos x+\sin x-e^{-y}}{2\cos x-e^{y}-e^{-y}}$ प्रदर्शित कीजिये कि $f(z)$, प्रतिबन्ध $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ के अन्तर्गत $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cot\left(\frac{z}{2}\right)$ है।

(b) Show that continuity is a necessary but not a sufficient condition for the existence of a finite derivative. 5

प्रदर्शित कीजिये कि परिमित अवकलज के अस्तित्व के लिए सांतत्यता आवश्यक प्रतिबन्ध है, परन्तु पर्याप्त नहीं।

UNIT-II/इकाई-II

3. (a) State and prove Cauchy's Integral theorem. 5

कौशी के समाकलन प्रमेय का कथन करते हुए सिद्ध कीजिये।

(b) If a function f(z) is analytic within and on a simple closed contour C. Then prove that its derivative at any point Z_0 inside C is given by: 5

यदि एक फलन f(z) सरल संवृत्त कंटूर C के अन्तर एवं ऊपर एक विश्लेषिक फलन हो, तो सिद्ध कीजिए कि C के अन्दर किसी बिन्दु Z_0 पर इसके अवकलज का मान होगा:

$$f'(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$$

4. (a) State and prove Liouville's theorem. 5

ल्यूवेल प्रमेय का कथन करते हुए सिद्ध कीजिये।

(b) Evaluate : मान ज्ञात कीजिए: 5

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{e^{zt}}{(z^2-1)^2}dz,\ t>0$$

Where C is circle $|z|=3$.

जहाँ C एक वृत्त है $|z|=3$

UNIT-III/इकाई-III

5. (a) Find the Taylor's and Laurent's series which represent the function $\frac{z^2-1}{(z+2)(z+3)}$ the regions.

टेलर एवं लौरां श्रेणी प्राप्त करो जो कि निम्न क्षेत्र में वैध-फलन $\frac{z^2-1}{(z+2)(z+3)}$ को निरूपित करती है:

(i) $|z|<2$ (ii) $2<|z|<3$ (iii) $|z|>3$

(b) Find the domain of convergence of the series: 5

निम्न श्रेणी के लिए अभिसरण का प्रान्त ज्ञात कीजिये:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.3.5......(2n-1)}{n!}\left(\frac{1-z}{z}\right)^n$$

6. (a) State and prove maximum modulus theorem. 5

महत्तम मापांक प्रमेय का कथन करते हुए सिद्ध कीजिये।

(b) Show that two power series $\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ and $\sum_{n=1}^{\infty}na_n z^{n-1}$ have same radius of convergence.

प्रदर्शित कीजिए कि दो घात श्रेणियों $\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ और $\sum_{n=1}^{\infty}na_n z^{n-1}$ की अभिसरण त्रिज्या एक ही है।

UNIT-IV/इकाई-IV

7. (a) If $f(z)$ has an isolated singularity at $z = z_0$ and is bounded in some deleted neighbourhood of z_0, then show that z_0 is removable singularity. 5

यदि $z = z_0$ फलन $f(z)$ की वियुक्त विचित्रता हो तथा $z = z_0$ के निष्कासित प्रतिवेष में f(z) प्रतिबद्ध हो तो दिखाईये कि z_0 एक अपनेय विचित्रता है।

(b) State and prove Cauchy's Residue theorem. 5

कौशी अवशेष प्रमेय का कथन करते हुए सिद्ध कीजिये।

8. (a) If f(z) and g(z) are analytic functions in a domain G and $f(z) = g(z)$ on a subset of G, which has limit points in G. Then show that if for each $z \in D$, f(z) = g(z) in whole of G.

यदि f(z) तथा g(z) प्रान्त G में विश्लेषिक फलन है तथा D समुच्चय G का असमुच्चय है, जिसके सीमा बिन्दु G में हैं। यदि प्रत्येक $z \in D$ के लिए, f(z) = g(z) है तो दिखाईये कि प्रान्त G में प्रत्येक z के लिए $f(z) = g(z)$ होगा।

(b) Find the residue of $\frac{z^2}{(z-1)(z-2)(z-3)}$ at z = 1,2,3 and infinity and show that their sum is zero. 5

$\frac{z^2}{(z-1)(z-2)(z-3)}$ का z = 1,2,3 और अनन्त पर अवशेष ज्ञात कीजिये तथा प्रदर्शित कीजिये कि उनका योग शून्य है।

UNIT-V/इकाई-V

9. (a) What is a necessary condition for w =f(z) to represent a conformal mapping? 5

फलन w =f(z) के अनुकोण प्रतिचित्रण के निरूपण के लिए आवश्यक प्रतिबन्ध क्या है?

(b) Define analytic continuation. Show the power series $1 + z + z^2 + z^4 + z^8 + \ldots\ldots$ can not be continued analytically beyond $|z| = 1$. 5

विश्लेषिक सांतत्य को परिभाषित कीजिये। सिद्ध कीजिये कि घात श्रेणी $1 + z + z^2 + z^4 + z^8 + \ldots\ldots$ का वृत्त $|z| = 1$ से आगे विश्लेषिक सांतत्य नहीं किया जा सकता है।

10. (a) Apply the calculus of residues to prove : 5

अवशेष फलन के अनुप्रयोग से सिद्ध कीजिये कि:

$$\int_0^\infty \frac{\sin \pi x}{x(1-x^2)} dx = \pi$$

(b) Find a bilinear transformation that maps the points $z = \infty$, i, 0 into the points w = 0, i and ∞.

एक द्विरैखिक रूपान्तरण ज्ञात कीजिये जो बिन्दुओं $z = \infty$, i, 0 को बिन्दुओं w = 0, i तथा ∞ में प्रतिचित्रित करता है।