B.A./B.Sc. (Part-III) Examination, 2017

(COMMON FOR THE FACULTIES OF ARTS AND SCIENCE)
[Also Common with Subsidiary Paper of B.A./B.Sc. (Hons.) Part III]
(Three-Year Scheme of 10+2+3 Pattern)

MATHEMATICS -I
(Algebra)

Time Allowed : Three Hours **Maximum Marks : 50 for Science**
66 for Arts

किसी भी परीक्षार्थी को पूरक उत्तर-पुस्तिका नहीं दी जायेगी। अत: परीक्षार्थियों को चाहिये कि वे मुख्य उत्तर-पुस्तिका में ही समस्त प्रश्नों के उत्तर लिखें।
किसी भी एक प्रश्न के अन्तर्गत पूछे गए विभिन्न प्रश्नों के उत्तर, उत्तर-पुस्तिका में अलग-अलग स्थानों पर हल करने के बजाय एक ही स्थान पर हल करें।
प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न का चयन करते हुए, कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिये।
प्रश्नों के उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न पत्र पर रोल नम्बर अवश्य लिखें।

UNIT-I/इकाई-I

1. (a) Prove that the residue classes modulo m form a group with respect to addition of residue classes. 5,6½
सिद्ध कीजिए कि माड्यूलों m की अवशेष कक्षाएँ, अवशेष कक्षाओं के योग के सापेक्ष एक ग्रुप बनाती है।
(b) If the order of an element a of a group G is n, then prove that the order of a^p is also n provided p and n are relatively prime. 5,6½
यदि किसी ग्रुप G के अवयव a की कोटि n है, तब सिद्ध कीजिए कि a^p की कोटि भी n होगी यदि p तथा n सापेक्षिक अभाज्य है।

2. (a) Prove that every infinite cyclic group has two and only two generators. 5
सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक अपरिमित चक्रीय ग्रुप के दो और केवल दो ही जनक होते हैं।
(b) State and prove the Lagrange's theorem. 1+4=5, 1½+5=6½
लेग्रेंज-प्रमेय का कथन व प्रमाण दीजिए।

UNIT-II/इकाई-II

3. (a) Prove that every homomorphic image of : 2½+2½=5, 3½+3=6
सिद्ध कीजिए कि:
(i) an abelian group is abelian
प्रत्येक क्रमविनिमेय ग्रुप का समाकारी प्रतिबिम्ब भी क्रमविनिमेय होता है।

(ii) a cyclic group is cyclic
प्रत्येक चक्रीय ग्रुप का समाकारी प्रतिबिम्ब भी चक्रीय होता है।
(b) Prove that a subgroup N of G is a normal subgroup of G if and only if every right coset of N in G is a left coset of N in G. 5,6½
सिद्ध कीजिए कि किसी उपग्रुप G का कोई उपग्रुप N एक विशिष्ट उपग्रुप होता है यदि और केवल यदि प्रत्येक दक्षिण सहसमुच्चय, वाम सहसमुच्चय है।

4. (a) If H is a subgroup of G and N is a normal subgroup of G, then prove that $H \cap N$ is a normal subgroup of H, where $H \cap N$ need not be normal in G. 5,6½
यदि H, उपग्रुप G का उपग्रुप है तथा N, G का विशिष्ट उपग्रुप है तब सिद्ध कीजिए कि $H \cap N$, उपग्रुप H का विशिष्ट उपग्रुप होता है, जबकि $H \cap N$ का G में विशिष्ट उपग्रुप होना आवश्यक नहीं है।
(b) State and prove the fundamental theorem of Homomorphism. 5,6½
समाकारिता की मूलभूत प्रमेय का कथन व प्रमाण दीजिए।

UNIT-III /इकाई- III

5. (a) Prove that a finite commutative ring without zero divisor is a field.
सिद्ध कीजिए कि शून्य के भाजकों से रहित परिमित क्रमविनिमेय वलय एक क्षेत्र होता है। 5,6½
(b) For a ring R in which $a^2 = a,\ \forall a \in R$, prove that : 5,6½
उस वलय R के लिए जिसके लिए $a^2 = a,\ \forall a \in R$ हो, सिद्ध कीजिए कि:
(i) $a + a = 0,\ \forall a \in R$
(ii) $a + b = 0 \Rightarrow a = b$
(iii) R is a commutative ring (R एक क्रमविनिमेय वलय है)

6. (a) Prove that the set $S = \left\{a + 2^{\frac{1}{3}}b + 4^{\frac{1}{3}}c : a, b, c \in Q\right\}$ is a sub field of R. 5,6½
सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $S = \left\{a + 2^{\frac{1}{3}}b + 4^{\frac{1}{3}}c : a, b, c \in Q\right\}$, R का एक उपक्षेत्र है।
(b) Prove that every ring can be embedded in a ring with unity. 5,6½
सिद्ध कीजिए कि किसी भी वलय का एक इकाई सहित वलय में अंतस्थापन किया जा सकता है।

UNIT-IV/इकाई-IV

7. (a) Let I_1 and I_2 be two ideals of a ring R, then prove that $I_1 + I_2 = \{a_1 + a_2 : a_1 \in I_1, a_2 \in I_2\}$ is an ideal of R containing both I_1 and I_2. 5,6½
यदि I_1 तथा I_2 किसी वलय R की दो गुणजावलियाँ हों, तब सिद्ध कीजिए कि $I_1 + I_2 = \{a_1 + a_2 : a_1 \in I_1, a_2 \in I_2\}$ भी R की एक गुणजावली होगी जिसमें I_1 तथा I_2 दोनों अन्तर्विष्ट है।

(b) Prove that an ideal I of a commutative ring R with unit is maximal if and only if the quotient ring $\frac{R}{I}$ is a field. 5,6½

सिद्ध कीजिए कि तत्समकी क्रमविनिमेय वलय R की कोई गुणजावली I एक उचिष्ठ गुणजावली है यदि और केवल यदि विभाग वलय $\frac{R}{I}$ एक क्षेत्र है।

8. (a) Prove that the union of two subspaces W_1 and W_2 of a vector space V is a subspace if and only if either $W_1 \subset W_2$ or $W_2 \subset W_1$.
सिद्ध कीजिए कि किसी सदिश समष्टि V के दो उपसमष्टियों W_1 तथा W_2 का संघ एक उपसमष्टि होता है यदि और केवल यदि $W_1 \subset W_2$ या $W_2 \subset W_1$

(b) Let S be the set of all solutions (x, y, z) satisfying the simultaneous equations $ax + by + c = 0$ and $dx + ey + fz = 0$ where $a, b, c, d, e, f \in R$, then prove that S is a subspace of $R^3(R)$.
माना कि युगपत समीकरण $ax + by + c = 0$ तथा $dx + ey + fz = 0$ के सभी हलों (x, y, z) का समुच्चय S हैं, जहाँ $a, b, c, d, e, f \in R$ तब सिद्ध कीजिए कि S, सदिश समष्टि $R^3(R)$ की उपसमष्टि है।

UNIT-V/इकाई-V

9. (a) If S and T are subspaces of the vector space V(F), then prove that :
(i) $S + T$ is a subspace of V(F)
(ii) $L(S \cup T) = S + T$ 5,7
यदि S तथा T किसी सदिश समष्टि V(F) की उपसमष्टियाँ है तब सिद्ध कीजिए कि:
(i) $S + T$, V(F) की उपसमष्टि है।
(ii) $L(S \cup T) = S + T$

(b) Prove that every finite dimensional vector space has a basis. 5, 7
सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिमित विमा वाले सदिश समष्टि का एक आधार होता है।

10. (a) Prove that, if $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ is a basis for vector space $V_3(R)$, then $\{\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha)$ is also a basis of $V_3(R)$.
सिद्ध कीजिए कि यदि $\{\alpha, \beta, \gamma\}$, सदिश समष्टि $V_3(R)$ का आधार है तब $\{\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha)$ भी $V_3(R)$ का आधार है।

(b) If S and T are finite dimensional subspaces of a vector space V(F), then prove that $\dim S + \dim T = \dim(S + T) + \dim(S \cap T)$
यदि S तथा T किसी सदिश समष्टि V(F) की परिमित विमीय उपसमष्टियाँ हों तब सिद्ध कीजिए कि विमा S + विमा T = विमा (S + T) + विमा $(S \cap T)$