rtuonline.com

MATHEMATICS

THIRD PAPER

(Three-Dimensional Geometry and Optimization Theory)

Time Allowed : Three Hours **Maximum Marks :** 32 for Science
44 for Arts

Write your roll number on question paper before start writing answers of questions.

प्रश्नों के उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न पत्र पर रोल नम्बर अवश्य लिखें।

Attempt five questions in all, selecting one question from each Unit. All questions carry equal marks.

प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न का चयन करते हुये, कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिये। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

UNIT - I / इकाई - I

1. (a) Find the equation of the tangent to the circle $r = 2a\cos\theta$ at any point θ_1 of the circle. 4

वृत्त $r = 2a\cos\theta$ के किसी बिन्दु θ_1 पर स्पर्शी का समीकरण ज्ञात कीजिये।

(b) Prove that locus of the middle point of the focal chord of a conic is the itself. 4

सिद्ध कीजिये कि किसी शांकव की नाभीय जीवा के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ वही शांकव होगा।

2. (a) Define director circle of the conic. Find director circle's equation to the conic $\frac{1}{r} = 1 + e\cos\theta$. 1+3=4

शांकव का नियामक वृत्त की परिभाषा दीजिये। शांकव $\frac{1}{r} = 1 + e\cos\theta$ के लिए नियामक वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिये।

(b) Prove that four normals can be draws on a conic from any given point. 4

सिद्ध कीजिये कि किसी दिये हुए बिन्दु से शांकव पर चार अभिलंब खींचे जा सकते हैं।

UNIT - II / इकाई - II

3. (a) Obtain the equation of the sphere which passes through the points (1,0,0); (0, 1, 0); (0,0,1) and has its radius as small as possible. 4

(1,0,0) ; (0, 1, 0); (0,0,1) बिन्दुओं से गुजरने वाले उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिये जिसकी त्रिज्या न्यूनतम हो।

(b) Show that the equaltion $4x^2 - y^2 + 2z^2 + 2xy - 3yz + 12x - 11y + 6z + 4 = 0$ represents a cone with vertex (-1, -2, -3). 4

सिद्ध कीजिये कि समीकरण $4x^2 - y^2 + 2z^2 + 2xy - 3yz + 12x - 11y + 6z + 4 = 0$ एक शंकु को निरूपित करता है जिसका शीर्ष (-1, -2, -3) है।

4. (a) Find the equation of the sphere having the circle $x^2 + y^2 + z^2 + 10y - 4z = 8$, $x + y + z = 3$ as a great circle. 4

गोले का समीकरण ज्ञात कीजिये जिसका वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 + 10y - 4z = 8$, $x + y + z = 3$ एक वृहत् वृत्त हो।

(b) Prove that the plane $ax + by + cz = 0$ cuts the cone $yz + zx + xy = 0$ in perpendicular lines, if $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$. 5

सिद्ध कीजिये कि समतल $ax + by + cz = 0$ शंकु $yz + zx + xy = 0$ को लम्ब रेखाओं में काटता है, यदि $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$

UNIT-III / इकाई - III

5. (a) Find the equation of the cylinder whose generators are parallel to the line $\frac{x}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+1}{-4}$ and whose guiding curve is the hyperbola $3x^2 - 4y^2 = 5$, $z = 2$. 4

उस बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिये जिसके जनक रेखाएँ $\frac{x}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+1}{-4}$ के समान्तर हैं तथा जिसकी निर्देशक वक्र अतिपरवलय $3x^2 - 4y^2 = 5$, $z = 2$ है।

(b) Find the equations of two tangent planes whcih contain the line given by $7x + 10y - 30 = 0 = 5y - 3z$ and touch the ellipsoid $7x^2 + 5y^2 + 3z^2 = 60$. 4

दो स्पर्श समतलों के समीकरण ज्ञात कीजिये जो सरल रेखा $7x + 10y - 30 = 0 = 5y - 3z$ से जाते हैं और दीर्घवृत्तज $7x^2 + 5y^2 + 3z^2 = 60$ को स्पर्श करते हैं।

6. (a) Find the locus of the point of intersection of three mutually perpendicular tangent planes to the central conicoid $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$. 4

सकेन्द्र शांकवज $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$ के तीन पारस्परिक लम्ब स्पर्श–तलों के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिये।

(b) Find the length of the normal chord through the point $P(\alpha, \beta, \gamma)$ of the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. 4

बिन्दु $P(\alpha, \beta, \gamma)$ से दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ पर खींचे गये अभिलम्ब जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिये।

UNIT - IV / इकाई - IV

7. (a) Find the equation to the generating lines of the hyperboloid $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$ which pass through the point (2, 3, -4). 4

rtuonline.com

अतिपरवलयज $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$ के बिन्दु (2, 3, -4) से गुजरने वाली जनक रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिये।

(b) Reduce the following equation to standard form: 4

$2x^2-7y^2+2z^2-10yz-8zx-10xy+6x+12y-6z+5=0$

निम्न समीकरण को मानक रूप में परिवर्तित कीजिये:

$2x^2-7y^2+2z^2-10yz-8zx-10xy+6x+12y-6z+5=0$

8. (a) Prove that any generator of the λ-system intersects any generator of the μ-system of the hyperboloid of one sheet. 4

सिद्ध कीजिये कि एक पृष्ठी अतिपरवलयज के λ–निकाय का कोई जनक μ–निकाय के किसी जनक को प्रतिच्छेदित करता है।

(b) Prove that the equation 4

$x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy+3x+y+4z+4=0.$

represent an ellipsoid, also find the square of whose semi-axes and equation of the principal axes.

सिद्ध कीजिये कि समीकरण

$x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy+3x+y+4z+4=0$

एक दीर्घवृत्तज को प्रदर्शित करता है जिसके अर्ध अक्षों के वर्ग एवं मुख्य अक्षों का समीकरण ज्ञात कीजिये।

UNIT - V / इकाई - V

9. (a) Show that the set of all convex combinations of a finite number of points $x_1, x_2, ..., x_n$ is a convex set. 4

सिद्ध कीजिये कि $x_1, x_2, ..., x_n$ परिमित बिन्दुओं के सभी अवमुख संचयों का समुच्चय एक अवमुख समुच्चय होता है।

(b) If X_0 and W_0 are respectively feasible solutions of a primal and its dual such that $CX_0 = b^TW_0$ then X_0 and W_0 are the optimal solutions to the primal and dual respectively; prove it. 4

यदि X_0 तथा W_0 किसी आद्य समस्या तथा उसके संगत द्वैती समस्या के क्रमशः सुसंगत हल हों, जिससे $CX^0 = b^TW_0$ तब X_0 एवं W_0 क्रमशः आद्य समस्या तथा द्वैती समस्या के इष्टतम हल होंगे, इस सिद्ध कीजिये।

10.(a) Find an optimal solution of the following L.P.P. without using the simplex method (using B.F.S.): 4

Maximize $f(x)=2x_1+3x_2+4x_3+7x_4$

Such that $2x_1+3x_2-x_3+4x_4=8$

$x_1-2x_2+6x_3-7x_4=-3$

and $x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0$

rtuonline.com

निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या के इष्टतम हल बिना सिम्पलेक्स विधि से (आधारी सुसंगत हलों के माध्यम से) ज्ञात कीजिये :

अधिकतम कीजिये $f(x)=2x_1+3x_2+4x_3+7x_4$

व्यरोध $2x_1+3x_2-x_3+4x_4=8$

$x_1-2x_2+6x_3-7x_4=-3$

तथा $x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0$

(b) If at any iteration of the simplex algorithm, we get $z_j-c_j<0$ for at least one j and for this $j, y_{ij}\le 0\forall i=1,2,.....,m$ then if the objective function is to be maximized the problem has an unbounded solution; prove it. 4

यदि सिम्पलैक्स कलन में किसी पुनरावृत्ति पर कम से कम एक j के मान के लिए $z_j-c_j<0$ प्राप्त होता है तथा साथ ही इस j के मान के लिए $y_{ij}\le 0\forall i=1,2,.....,m$ तब उद्देश्य फलन को अधिकतम करना है तो समस्या का हल अपरिबद्ध होता है, इसे सिद्ध कीजिये।