

Time Allowed : Three Hours **Maximum Marks :** 50 for Science
 66 for Arts

Write your roll number on question paper before start writing answers of questions.

प्रश्नों के उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न पत्र पर रोल नम्बर अवश्य लिखें।

Attempt five questions in all, selecting one question from each Unit. All questions carry equal marks.

प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न का चयन करते हुये, कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिये। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

UNIT - I / इकाई - I

1. (a) Show that Hyper-harmonic series: 5

हाइपर-हारमोनिक श्रेणी:

$$\sum \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$$

(i) Will be convergent, if $P > 1$
 अभिसारी होगी, यदि $P > 1$

(ii) Will be divergent, if $P \leq 1$
 अपसारी होगी, यदि $P \leq 1$

(b) Prove that the following series is convergent, if $P > 2$ otherwise divergent: 5

सिद्ध कीजिए कि निम्न श्रेणी अभिसारी है, यदि $P > 2$ हो, अन्यथा अपसारी है:

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^P + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^P + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^P + \dots$$

2. (a) Test the convergence and absolute convergence of the following series: 5

निम्न श्रेणी के अभिसरण तथा निरपेक्ष अभिसरण की जाँच कीजिए:

$$1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p} + \dots$$

(b) Find the power series expansion of $\log(1+x)$ 5

$\log(1+x)$ का घात श्रेणी प्रसार ज्ञात कीजिए।

UNIT - II / इकाई - II

3. (a) For the curve $r^m = a^m \cos m \theta$, prove that: 5

वक्र $r^m = a^m \cos m \theta$ के लिए सिद्ध कीजिए कि:

$$\frac{ds}{d\theta} = a(\sec m\theta)^{\frac{(m-1)}{m}} \text{ and (तथा) } a^{2m} \frac{d^2r}{ds^2} + mr^{2m-1} = 0$$

(b) Find the pedal equation of the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. 5

दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ का पदिक समीकरण ज्ञात कीजिए।

4. (a) If C_x, C_y be the chords of curvature parallel to the axes at any point of the curve $y = ae^{x/a}$, prove that: 5

यदि वक्र $y = ae^{x/a}$ के किसी बिन्दु की अक्षों के समान्तर वक्रता जीवाएँ C_x तथा C_y हों तो सिद्ध कीजिए कि:

$$\frac{1}{C_x^2} + \frac{1}{C_y^2} = \frac{1}{2aC_x}$$

(b) If $\mu = f(x)$, where $x^2 = x^2 + y^2 + z^2$, then prove that: 5

यदि $\mu = f(r)$, जहाँ $x^2 = x^2 + y^2 + z^2$, तब सिद्ध कीजिए कि:

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} = f''(r) + \left(\frac{2}{r}\right) f'(r)$$

UNIT-III / इकाई - III

5. (a) Find the envelope of the circle described on the radii vectors of the curve $r^n = a^n \cos n \theta$ as diameter. 5

उन वृत्तों का अन्वालोप ज्ञात कीजिए जो वक्र $r^n = a^n \cos n \theta$ की ध्रुवान्तर रेखाओं को व्यास मानकर खींचे गए हैं।

(b) Find the maxima and minima of $\mu = x^2 + y^2 + z^2$ subject to the conditions $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ and $lx + my + nz = 0$. 5

प्रतिबन्धों $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ तथा $lx + my + nz = 0$ के अन्तर्गत $\mu = x^2 + y^2 + z^2$ के उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ ज्ञात कीजिए।

6. (a) Find the asymptotes of the following curve. 5

निम्न वक्र के अनन्तस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए।

$$y^3 - xy^2 - x^2y + x^3 + x^2 - y^2 - 1 = 0$$

(b) Trace the following curve. 5

निम्न वक्र का अनुरेखण कीजिए।

$$y^2(a^2 + x^2) = x^2(a^2 - x^2)$$

UNIT - IV / इकाई - IV

7. (a) Legendre's Duplication formula: 5

लिजेन्डर द्विगुणन सूत्र:

$$\Gamma(m) \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}} \Gamma(2m), m \in \mathbb{Z}$$

- (b) Prove that: 5

सिद्ध कीजिए:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{(a \cos^4 \theta + b \sin^4 \theta)}} = \frac{\left\{\frac{1}{4}\right\}^2}{4(ab)^{1/4} \sqrt{\pi}}$$

8. (a) Change the order of integration in the following double integral: 5

निम्न द्वि-समाकलन में समाकलन का क्रम बदलिए:

$$\int_0^{2a} \frac{\sqrt{(2ax)}}{\sqrt{(2ax - x^2)}} dx dy$$

- (b) Evaluate: 5

मान ज्ञात कीजिए:

$$\iiint_V 2z \, dx dy dz$$

Where region of integrations is a cone V bounded by following.

जहाँ समाकलन क्षेत्र एक शंकु V है जो निम्न वक्रों से परिबद्ध है।

$$x^2 + y^2 = z^2, z = 1$$

UNIT - V / इकाई - V

9. (a) Find the area between the parabola $x^2 = 4y$ and the line $x = 4y - 2$.

परवलय $x^2 = 4y$ तथा रेखा $x = 4y - 2$ के मध्य का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

- (b) Find the intrinsic equation of the cardioid $r = a(1 - \cos \theta)$. 4,5

कार्डिऑइड $r = a(1 - \cos \theta)$ का नैज समीकरण ज्ञात कीजिए।

10. (a) Find the volume of the solid generated by the revolution of the curve $(a-x)y^2 = a^2x$ about its asymptote. 5

वक्र $(a-x)y^2 = a^2x$ को उसकी अनन्तस्पर्शी के चारों ओर घुमाने से जनित ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।

- (b) Find the surface area of the solid generated by the revolution of the

astroid $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ about the x-axis. 5

एस्ट्रॉयड $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ को x- अक्ष के सापेक्ष घुमाने से बने ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।