This question paper contains 6 printed pages.

B.A. / B.Sc. (Pt.-III)

3125/3175-A-III

Mat.-III

B.A./B.Sc. (Part-III) EXAMINATION, 2019

(Common For The Faculties of Arts and Science)

[Also Common with Subsidiary Paper of B.A./B.Sc. (Hons.) Part-III]

(Three-Year Scheme of 10+2+3 Pattern)

MATHEMATICS - III

(Mechanics)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 40 for Science / 54 for Arts / Old Scheme - 32

Attempt five questions in all selecting one question from each unit.
प्रत्येक इकाई में से एक प्रश्न करते हुए कुल पाँच प्रश्न हल करने हैं।

No supplementary answer-book will be given to any candidate. Hence the candidates should write their answers precisely in the main answer-book only.
किसी भी परीक्षार्थी को पूरक उत्तर-पुस्तिका नहीं दी जायेगी। अतः परीक्षार्थियों को चाहिए कि वे मुख्य उत्तर-पुस्तिका में ही समस्त प्रश्नों के उत्तर लिखें।

All the parts of one question should be answered at one place in the answer-book. One complete question should not be answered at different places in the answer-book.
किसी भी एक प्रश्न के अन्तर्गत पूछे गये विभिन्न प्रश्नों के उत्तर, उत्तर-पुस्तिका में अलग-अलग स्थानों पर हल करने के बजाय एक ही स्थान पर हल करें।

Write your roll number on question paper before you start writing answers of questions.
प्रश्नों के उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न-पत्र पर रोल नम्बर अवश्य लिखें।

UNIT - I / इकाई - I

1. (a) A point P describes an equiangular spiral $r = ae^{\theta \cot \alpha}$ with constant angular velocity about the pole O. Show that its acceleration varies as OP and is in a direction making with the tangent at P the same constant angle that OP makes with the tangent.

एक बिन्दु P ध्रुव O के सापेक्ष अचर कोणीय वेग से एकसमान कोणिक सर्पिल $r = ae^{\theta \cot \alpha}$ में गमन करता है। सिद्ध कीजिए कि इसका त्वरण OP के समानुपाती है तथा इसकी दिशा P पर स्पर्श रेखा से वही अचर कोण बनाती है जो OP इस स्पर्श रेखा से बनाती है।

(b) A particle is moving in a parabola with uniform angular velocity about the focus. Prove that its normal acceleration at any point is proportional to the radius of curvature of its path at that point.

एक कण एकसमान कोणीय वेग से किसी परवलय में उसकी नाभि के चारों ओर चलता है। सिद्ध कीजिए कि किसी बिन्दु पर अभिलंबिक त्वरण उस बिन्दु पर पथ की वक्रता-त्रिज्या के समानुपाती होता है।

P.T.O.

(a) A particle moves with S.H.M. in a straight line. In the first second after starting from rest it travels a distance 'a' and in the next second it travels a distance 'b' in the same direction. Find the amplitude of motion and its period.

एक कण सरल रेखा में सरल आवर्त गति में गति मान है। विरामावस्था से गति प्रारम्भ होने के प्रथम सैकण्ड में 'a' दूरी तथा अगली सैकण्ड में 'b' दूरी उसी दिशा में तय करता है। गति का आयाम तथा इसका आवर्तकाल ज्ञात कीजिए।

(b) A mass m hangs from a fixed point by a light elastic string and is given a small vertical displacement. Prove that the motion is S.H.M. If l be the length of the string in equilibrium position and n the number of oscillations per second then find the natural length of the string.

m द्रव्यमान का एक कण एक हल्की प्रत्यास्थ डोरी द्वारा एक निश्चित बिन्दु से लटका हुआ है तथा इसे लघु ऊर्ध्वाधर विस्थापन दिया गया है। सिद्ध कीजिए कि कण की गति सरल आवर्त गति होगी। यदि संतुलन की दिशा में डोरी की लम्बाई l हो तथा दोलन आवृत्ति n प्रति सैकण्ड हो तो डोरी की स्वाभाविक लम्बाई ज्ञात कीजिए। 4,4 / 6,5 / 3½, 3

UNIT - II / इकाई - II

(a) A particle is projected vertically upwards with velocity U in a medium whose resistance varies as the square of velocity. Prove that the particle will return to the point of projection with velocity $v = \frac{UV}{\sqrt{U^2 + V^2}}$ after a time $\frac{V}{g}\left[\tan^{-1}\left(\frac{u}{V}\right) + \tan h^{-1}\left(\frac{v}{V}\right)\right]$ Where V is the terminal velocity.

एक कण U वेग से ऊर्ध्वाधर दिशा में ऊपर की ओर एक ऐसे माध्यम में फेंका जाता है जिसका प्रतिरोध वेग के वर्ग के समानुपाती है। सिद्ध कीजिए कि कण प्रक्षेप बिन्दु पर वेग $v = \frac{UV}{\sqrt{U^2 + V^2}}$ से लौट आयेगा तथा इसको लौटने में $\frac{V}{g}\left[\tan^{-1}\left(\frac{u}{V}\right) + \tan h^{-1}\left(\frac{v}{V}\right)\right]$ समय लगेगा, जहाँ V अन्तिम वेग है।

(b) A body is projected at an angle α to the horizon so as to just clear two walls of equal height 'a' at a distance '2a' from each other. Show that the range is equal to $2a \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

एक पिण्ड को क्षैतिज से α कोण पर इस प्रकार फेंका जाता है कि यह दो एक समान ऊँचाई 'a' की दीवारें जो एक दूसरे से '2a' दूरी पर हैं, ठीक पार करता है। सिद्ध कीजिए कि परास का मान $2a \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ है। 4,4 / 6,5 / 3½,3

(a) A uniform elastic string has length 'a_1', when the tension is T_1 and a length 'a_2' when the tension is T_2. Find its natural length and the amount of workdone in stretching it from the natural length to length '$a_1 + a_2$'.

एक एकसमान प्रत्यास्थ डोरी में तनाव T_1 है जबकि लम्बाई 'a_1' है तथा तनाव T_2 जबकि उसकी लम्बाई 'a_2' है। डोरी की स्वाभाविक लम्बाई तथा स्वाभाविक लम्बाई से '$a_1 + a_2$' लम्बाई तक विस्तार करने में किया गया कार्य ज्ञात कीजिए।

(b) [illegible] slides down the circle or surface of a smooth fixed sphere of [illegible] slightly displaced from rest at the highest point. Find where it will leave the circle and show that thereafter it describes a parabola of latus rectum $\frac{16a}{27}$. Also prove that it will strike the horizontal plane through the lowest point of the circle at a distance $\frac{5(\sqrt{5}+4\sqrt{2})a}{27}$ from the vertical diameter.

त्रिज्या 'a' के एक चिकने स्थिर वृत्त या गोले की सतह के उच्चतम बिन्दु पर कोई कण विरामावस्था में है, जो थोड़ा सा विस्थापित किये जाने पर नीचे की ओर सरकने लगता है। ज्ञात कीजिए कि वह वृत्त से कहाँ पर अलग हो जाएगा और सिद्ध कीजिए कि अलग हो जाने के बाद एक परवलय बनायेगा जिसका नाभिलम्ब $\frac{16a}{27}$ होगा। यह भी सिद्ध कीजिए कि ऊर्ध्वाधर व्यास से $\frac{5(\sqrt{5}+4\sqrt{2})a}{27}$ दूरी पर जाकर वृत्त के निम्नतम बिन्दु से गुजरने वाले क्षैतिज समतल से टकरायेगा।

4,1 / 6,5 / 3½, 3

UNIT - III / इकाई - III

(a) A particle moves in an ellipse under a force which is always directed towards its focus. Find the law of force and the velocity at any point of its path.

एक कण किसी दीर्घवृत्त में इस प्रकार गमन करता है कि उस पर लगा बल सर्वदा दीर्घवृत्त की नाभि की ओर दिष्ट है। बल नियम ज्ञात कीजिए तथा किसी बिन्दु पर कण का वेग ज्ञात कीजिए।

(b) A particle is projected from an apse at a distance 'a' with a velocity from finity under the action of a central acceleration μu^{2n+3}. Prove that the path is $r^n = a^n \cos n\theta$

एक कण केन्द्रीय त्वरण μu^{2n+3} से गतिशील है और इसे 'a' दूरी से स्तब्धिका से ऐसे वेग से प्रक्षिप्त किया जाता है कि वह अनन्त से उस बिन्दु तक गिरने में प्राप्त वेग के बराबर है। प्रदर्शित कीजिए कि इसका पथ $r^n = a^n \cos n\theta$ है।

4,4 / 5,5 /

6. (a) Find the M.I. of a hollow sphere of radius a and mass M about a diameter.

त्रिज्या a और द्रव्यमान M वाले एक छेदक गोले की व्यास का M.I. मान ज्ञात कीजिए।

(b) Find the product of inertia of an elliptic quadrant about the axis of the ellipse.

एक दीर्घवृत्तीय चतुर्थांश के जड़त्व के दीर्घवृत्तीय अक्ष के गुणांक को ज्ञात कीजिए।

.5 / 3,

7. (a) A rod rests wholly within a smooth hemispherical bowl of radius r, its centre of gravity dividing the rod into two portions 'a' and 'b'. Show that, if θ be the inclination of the rod to the horizon in the position of equilibrium.

$$\sin\theta = \frac{b-a}{2\sqrt{r^2 - ab}}$$

एक छड़ किसी चिकने अर्धगोलाकार प्याले के भीतर पूर्णत: रखी हुई है। प्याले की त्रिज्या r है और छड़ का गुरुत्व केन्द्र इसे 'a' और 'b' दो भागों में विभाजित करता है। यदि साम्यावस्था में छड़ क्षैतिज के साथ θ कोण बनाती है तो सिद्ध कीजिए कि $\sin\theta = \frac{b-a}{2\sqrt{r^2 - ab}}$

(b) A heavy Carriage wheel of weight W and radius r is to be dragged over an obstacle of height h, by a horizontal force F applied to the center of the wheel. Show that F must be slightly greater than $\sqrt{\frac{2hr - h^2}{(r-h)}}$ W. http://www.uoronline.com

एक भारी गाड़ी का पहिया जिसका भार W और त्रिज्या r है, एक h ऊँचाई की रूकावट के ऊपर उसके केन्द्र पर क्षैतिज दिशा में बल F लगाकर खींचा जाता है। सिद्ध कीजिए कि बल F, $\sqrt{\frac{2hr - h^2}{(r-h)}}$ W. से थोड़ा सा अधिक होना चाहिए। **4,4 / 6,5 /3½,3**

(a) A ladder whose C.G. divides, it into two portions of length a and b, rest with one end on a rough horizontal floor and the other end against a rough vertical wall. If the co-efficient of friction at the floor and the wall be μ and μ' respectively then show that the inclination of the ladder to the floor. When equilibrium is limiting as $\tan^{-1}\left[\frac{a - b\mu\mu'}{\mu(a+b)}\right]$

एक सीढ़ी जिसका गुरुत्व केन्द्र इसे दो भागो 'a' और 'b' में विभाजित करता है, का एक सिरा रूक्ष क्षैतिज फर्श पर तथा दूसरा रूक्ष उध्वार्धर दीवार पर टिका है। यदि फर्श तथा दीवार के धर्षण गुणांक क्रमश: μ तथा μ' हों तो प्रदर्शित कीजिए कि सीमान्त संतुलन में सीढ़ी का फर्श से झुकाव होगा $\tan^{-1}\left[\frac{a - b\mu\mu'}{\mu(a+b)}\right]$

corresponding co-efficients of friction are W_1, W_2 and μ_1, μ_2 respectively. Show that greatest inclination of the plane for equilibrium is : .01

connected by a light string rest on an inclined plane. If their weights and

$$\tan^{-1}\left[\frac{\mu_1 W_1 + \mu_2 W_2}{W_1 + W_2}\right]$$

दो खुरदरे कण जिनके भार व घर्षण गुणांक क्रमश: W_1, W_2 तथा μ_1,μ_2 है, एक भारहीन रस्सी से जुड़े एक नत समतल पर है। सिद्ध कीजिए कि साम्यावस्था के लिए समतल का अधिकतम झुकाव होगा $\tan^{-1}\left[\frac{\mu_1 W_1 + \mu_2 W_2}{W_1 + W_2}\right]$

4,4 / 6,5 /3½, 3

UNIT - V / इकाई - V

(a) A heavy uniform rod of length 2a, rests with its ends in contact with two smooth inclined planes of inclinations α and β to the horizon. If θ be the inclination of the rod to horizon, prove by the principle of virtual work that $\tan\theta = \frac{1}{2}(\cot\alpha - \cot\beta)$.

2a लम्बाई का एक भारी एकसमान दण्ड क्षैतिज से α तथा β झुकावों के दो चिकने आनत समतलों पर साम्यावस्था में है, छड़ के सिरे इन आनत समतलों के सम्पर्क में हैं। यदि दण्ड का क्षैतिज से झुकाव θ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\tan\theta = \frac{1}{2}(\cot\alpha - \cot\beta)$।

(b) A string of length 'a' forms the shorter diagonal of a rhombus formed of four uniform rods, each of length 'b' and weight W, Which are hinged together. If one of the rods be supported in a horizontal position prove that the tension of the string is $\frac{2W\left(2b^2 - a^2\right)}{b\sqrt{4b^2 - a^2}}$.

'a' लम्बाई की एक डोरी चार एक समान परस्पर जुड़े हुए छड़ों द्वारा बने समचतुर्भुज का छोटे वाला विकर्ण बनाती है, जहाँ प्रत्येक छड़ की लम्बाई b और भार W है। यदि उनमें से एक छड़ क्षैतिज स्थिति में आधारित किया गया हो, तो सिद्ध कीजिए कि डोरी में तनाव होगा $\frac{2W\left(2b^2 - a^2\right)}{b\sqrt{4b^2 - a^2}}$.

2, 3

4,4 /

ɔ) Show that the length of an endless chain which will hang over a circular pulley of radius 'a', so as to be in contact with two thirds of the circumference of the pulley is $a\left[\frac{4\pi}{3}+\frac{3}{\log\left(2+\sqrt{3}\right)}\right]$

प्रदर्शित कीजिए कि एक अन्तहीन जंजीर जो त्रिज्या 'a' की एक वृत्ताकार घिरनी के $\frac{2}{3}$ परिधि से सम्पर्क में है, तो उसकी लम्बाई होगी $a\left[\frac{4\pi}{3}+\frac{3}{\log\left(2+\sqrt{3}\right)}\right]$

A heavy uniform chain AB hangs freely under gravity with the end A fixed and the other end B attached by a light string BC to a fixed point C at the same level on A. The lengths of the string and chain are such that the ends of the chain at A and B make angles of 60° and 30° respectively with the horizontal. Prove that the ratio of lengths of string and chain is $\left(\sqrt{3}-1\right):1$.

एक भारी एकसमान जंजीर AB गुरूत्वाकर्षण के अधीन लटकी हुई है जिसका एक सिरा A स्थिर है तथा दूसरा सिरा B एक हल्की डोरी BC द्वारा बंधा हुआ है, जहाँ A के समान स्तर पर बिन्दु C स्थित है। जंजीर तथा डोरी की लम्बाइयाँ इस प्रकार हैं कि जंजीर के सिरे A तथा B क्षैतिज से क्रमश : 60° तथा 30° के कोण बनाते हैं। सिद्ध कीजिए कि डोरी तथा जंजीर की लम्बाईयों का अनुपात $\left(\sqrt{3}-1\right):1$ है।

4,4 / 6,5 / 3½, 3