This question paper contains 4 printed pages. Roll No. .

3125/3175-A-I

B.A./B.Sc. (Part-III) EXAMINATION - 2022

106380

(Common for the faculties of Arts and Science)

(Also Common with Subsidiary Paper of B.A./B.Sc. (Hons.) Part-III)

(Three-Year Scheme of 10+2+3 Pattern)

MATHEMATICS-I

(Algebra)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 40 For Science; 53 For Arts; 50 For Old Selection Science

No supplementary answer-book will be given to any candidate. Hence the candidates should write their answers precisely in the main answer-book only.

किसी भी परीक्षार्थी को पूरक उत्तर-पुस्तिका नहीं दी जाएगी। अत: परीक्षार्थियों को चाहिए कि वे मुख्य उत्तर-पुस्तिका में ही समस्त प्रश्नों के उत्तर लिखें।

All the parts of one question should be answered at one place in the answer-book. One complete question should not be answered at different places in the answer-book.

किसी भी प्रश्न के अन्तर्गत पूछे गए विभिन्न प्रश्नों के उत्तर, उत्तर-पुस्तिका में अलग-अलग स्थानों पर हल करने के बजाय एक ही स्थान पर हल करें।

Write your roll number on question paper before start writing answers of questions.

प्रश्नों के उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न-पत्र पर रोल नम्बर अवश्य लिखिए।

*Attempt **FIVE** questions in all, selecting atleast **one** question from each Unit.*

*प्रत्येक इकाई में से कम से कम **एक** प्रश्न का चयन करते हुए कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*

UNIT - I / इकाई - I

1. (a) If a, b are any two elements of a group G then show that $(ab)^2=a^2b^2$ iff G is abelian. **(2.6, 3.5)**

यदि a, b किसी ग्रुप G के कोई दो अवयव हैं, तो प्रदर्शित कीजिये कि $(ab)^2=a^2b^2$ होगा यदि और केवल यदि G आबेली हो।

(b) Prove that the order of a finite cyclic group is same as the order of its generator. **(2.7, 3.5)**

सिद्ध कीजिये कि एक परिमित चक्रीय समूह की कोटि गुणांक (ग्रुपांक) और उसके जनक की कोटि बराबर होती है।

(c) Prove that the necessary and sufficient condition for a non empty sub set H of a group G to be a subgroup is $a \in H, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$. **(2.7, 3.6)**

सिद्ध कीजिये कि किसी ग्रुप G का अरिक्त उपसमुच्चय H एक उपग्रुप होगा यदि और केवल यदि $a \in H, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$.

2. (a) Prove that the order of every element of a finite group is finite and less than or equal to the order of the group. (2.6, 3.5)

सिद्ध कीजिये कि किसी परिमित ग्रुप (समूह) के प्रत्येक अवयव की कोटि परिमित होती है तथा यह या तो ग्रुप के कोटि के बराबर होती है या उससे कम।

(b) Prove that any two right coset of a subgroup of a group are either identical or disjoint. (2.7, 3.5)

सिद्ध कीजिये कि किसी समूह के उपसमूह के कोई दो दक्षिण सहकूल या तो समान होगें या अंयुक्त होगें।

(c) Prove that the order of each subgroup of a finite group is a division of the order of the group. (2.7, 3.6)

सिद्ध कीजिये की एक परिमित ग्रुप के प्रत्येक उपग्रुप का ग्रुपांक, उस ग्रुप के ग्रुपांक का भाजक होता है।

UNIT - II / इकाई - II

3. (a) Prove that a homomorphism f of a group G into a group G' is a monomorphism iff Kunel of f={e}, where e is the identity in G. (2.7, 3.5)

सिद्ध कीजिये कि एक ग्रुप G की समाकारिता f ग्रुप G' में एकैकी समाकारिता है यदि और केवल यदि f की अष्टि ={e} जहाँ e, G में तत्समक है।

(b) Prove that every finite group is isomorphic to some permutation group. (2.7, 3.6)

सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक परिमित ग्रुप किसी क्रमचय ग्रुप के तुल्यकारी होता है।

(c) Find a regular permutation group isomorphic to the multiplicative group. $G=\{1, -1, i, -i\}$

गुणनखण्डों वाले समूह $G=\{1, -1, i, -i\}$ का क्रमचय समूह ज्ञात कीजिये जो कि G के साथ तुल्यकारी है। (2.6, 3.5)

4. (a) Prove that a subgroup N of a group G is normal subgroup iff $gNg^{-1}=N, \forall g \in G$. (2.6, 3.5)

सिद्ध कीजिये कि समूह G का उपसमूह N एक विशिष्ट उपसमूह होता यदि और केवल यदि $gNg^{-1}=N, \forall g \in G$ है।

(b) Prove that every quotient group of an abelian group is abelian but its converse is not necessarily true.

सिद्ध कीजिये कि एक आबेली ग्रुप का प्रत्येक विभाग ग्रुप आबेली होता है, परन्तु उसका विलोभ आवश्यक नहीं की सत्य हो। (2.7, 3.5)

(c) Prove that every homomorphic image of a group G is isomorphic to some quotient group of G.

सिद्ध कीजिये कि किसी समूह G का प्रत्येक समाकृतिक प्रतिबिम्ब किसी अवशेष वर्ग समूह G के तुल्यकारी होता है। (2.7, 3.6)

UNIT - III / इकाई - III

5. (a) Prove that a ring R is without zero divisors iff the cancellation laws holds in R. **(4, 5.3)**

सिद्ध कीजिये कि वलय R शून्य भाजक रहित होगी यदि और केवल यदि R में निरसन नियम लागू होते हैं।

(b) Prove that a finite commutative ring without zero divisor is a field. **(4, 5.3)**

सिद्ध कीजिये कि शून्य के भाजकों से रहित परिमित क्रमविनिमेय वलय एक क्षेत्र होता है।

6. (a) Prove that the characteristic of an integral domain is either zero or a prime number. **(4, 5.3)**

सिद्ध कीजिये कि पूर्णांकीय प्रान्त का अभिलक्षण या तो शून्य है या अखण्डनीय संख्या है।

(b) Prove that every ring R can be embedded in a Ring R' with unity. **(4, 5.3)**

सिद्ध कीजिये कि किसी भी वलय R का, तत्समकी वलय R' मे अन्तः स्थापन किया जा सकता है।

UNIT - IV / इकाई - IV

7. (a) If I_1 and I_2 be two ideals of a ring R, then prove that $I_1 + I_2 = \{a_1 + a_2 : a_1 \in I_1, a_2 \in I_2\}$ is an ideal of R containing both I_1 and I_2. **(4, 5.3)**

यदि I_1 व I_2 किसी वलय R की दो गुण जावलियाँ हों, तो सिद्ध कीजिये कि $I_1 + I_2 = \{a_1 + a_2 : a_1 \in I_1, a_2 \in I_2\}$ भी R की एक गुणजावली होगी जिसमें I_1 व I_2 दोनों अन्तर्विष्ट है।

(b) Prove that an ideal I of a commutating ring R with unit is prime iff $\frac{R}{I}$ is an integral domain. **(4, 5.3)**

सिद्ध कीजिये कि किसी क्रमविनिमेय तत्समकी वलय R का कोई गुणजावली I अभाज्य गुणजावली होती है यदि और केवल यदि एक $\frac{R}{I}$ पूर्णांकीय प्रान्त है।

8. (a) *Prove that an ideal I of a commutative ring R with unit is maximal if and only if the quotient ring* $\frac{R}{I}$ is a field. **(4, 5.3)**

सिद्ध कीजिये कि तत्समकी क्रमविनिमेय वलय R की कोई गुणजावली I एक उच्चिष्ट गुणजावली है यदि और केवल यदि विभाग वलय $\frac{R}{I}$ एक क्षेत्र है।

(b) Prove that a field F is a vector space over any subfield S of F. **(4, 5.3)**

सिद्ध कीजिये कि फील्ड F किसी भी F के उपफील्ड S पर सदिश समष्टि है।

UNIT - V / इकाई - V

9. (a) Prove that any two basis of a finite dimensional vector space V consists of same number of elements.

सिद्ध कीजिये कि परिमित विमीय सदिश समष्टि V के कोई भी दो आधारों में अवयवों की संख्या समान होती है। **(4, 5.3)**

(b) Prove that the linear span L(S) of subset S of a vector space V(F) is the smallest subspace of V(F) containing S i.e., L(S)={S}. **(4, 5.3)**

सिद्ध कीजिये कि किसी सदिश समष्टि V(F) के उपसमुच्चय S की एकघात विस्तृति L(S), S को अंतर्विष्ट करने वाला V(F) का न्यूनतम उपसमष्टि है अर्थात L(S)={S} ।

10. (a) Prove that the set of non-zero vectors $\{v_1, v_2, \ldots\ldots\ldots, v_n\}$ of a vector space V(F) is linearly dependent iff some v_k, $2 \leq k<n$ in a linear combination of the preceding ones. **(4, 5.3)**

सिद्ध कीजिये कि किसी सदिश समष्टि V(F) के अशून्य सदिशों का समुच्चय $\{v_1, v_2, \ldots\ldots\ldots, v_n\}$ एकघाततः आश्रित (परतन्त्र) होगा यदि और केवल यदि जब कोई एक v_k अपने पूर्ववर्ती सदिशों का एक घात संचय हो, जहाँ $2 \leq k<n$ ।

(b) If W(F) is a subspace of finite dimensional vector space V(F), then prove that the quotient space $\left(\frac{V}{W}\right)(F)$ is also finite dimensional and $\dim \frac{V}{W} = \dim V - \dim W$. **(4, 5.3)**

यदि W(F) परिमित विमीय सदिश समष्टि V(F) का उपसमष्टि है, तो सिद्ध कीजिये कि खण्ड समष्टि $\left(\frac{V}{W}\right)(F)$ भी परिमित विमा की होती है तथा विमा $\frac{V}{W}$ = विमा V − विमा W

-oOo-