This question paper contains 4 printed pages.

B.A./B.Sc. (Pt. - III)

Roll No...........

3125/3175 - A - I

Mat. - I

B.A./ B.Sc. (Part - III) EXAMINATION - 2020

(COMMON FOR THE FACULTIES OF ARTS AND SCIENCE)

[Also Common with Subsidiary Paper of B.A./B.Sc. (Hons) Part - III]

(Three-Year Scheme of 10+2+3 Pattern)

MATHEMATICS - I

(Algebra)

Time Allowed : Three Hours

Maximum marks : Arts : 53

Science : Old Scheme : 50, New Scheme : 40

No supplementary answer book will be given to any candidate. Hence the candidates should write their answer precisely in the main answer - book only.

किसी भी परीक्षार्थी को पूरक उत्तर–पुस्तिका नहीं दी जाएगी। अतः परीक्षार्थियों को चाहिए कि वे मुख्य उत्तर–पुस्तिका में ही समस्त प्रश्नों के उत्तर सही ढंग से लिखें।

All the parts of one question should be answered at one place in the answer - book. One complete question should not be answered at different places in the answer-book.

किसी भी एक प्रश्न के अन्तर्गत पूछे गये विभिन्न प्रश्नों के उत्तर, उत्तर–पुस्तिका में अलग–अलग स्थानों पर हल करने के बजाय एक ही स्थान पर हल करें।

Attempt five questions in all, selecting one question from each Unit.

प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न का चयन करते हुए, कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिये।

Write your roll number on question paper before start writing answers of questions.

प्रश्नों के उत्तर से पूर्व प्रश्न–पत्र पर रोल नम्बर अवश्य लिखें।

UNIT - I/ इकाई – I

1. (a) Show that $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| \, a \in R_0 \right\}$ is a commutative group under matrix multiplication. 4,5¼

सिद्ध कीजिए कि $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| \, a \in R_0 \right\}$ आव्यूह गुणन के लिए एक क्रम विनिमेय समुह है।

(b) Prove that every infinite cyclic group has two and only two generators. 4,5¼

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक अपरिमित चक्रीय समूह के दो और केवल दो ही जनक होते हैं।

2. (a) If H is a subgroup of a group G and $T = \{x \in G \mid xH = Hx\}$ then prove that T is a subgroup of G. 4,5¼

यदि H, समूह G का उपसमूह है तथा $T = \{x \in G \mid xH = Hx\}$ तो सिद्ध कीजिए T, G का उपसमूह है।

(b) Find the order of the group of all even permutations of degree n. 4,5¼

N कोटि के सभी सम क्रमचयों के समूह को समूहांक ज्ञात कीजिए।

UNIT - II/ इकाई – II

3. (a) Prove that homomorphism f of group G into group G' is a monomorphism if and only if Kernel of f = {e}, where e is the identity of G. 4,5¼

सिद्ध कीजिए कि समूह G से समूह G' में सभाकारिता f एकैकी है यदि और केवल यदि f की अष्टि = {e}, जहाँ e, G में तत्समक है।

(b) Let G and G' be two groups. Prove that a mapping $f: G \to G'$ defined by $f(x) = x^{-1}\ \forall\ x \in G$ is an automorphism if and only if G is abelian. 4,5¼

माना G तथा G' दो समूह है। सिद्ध कीजिए कि प्रतिचित्रण $f: G \to G'$, $f(x) = x^{-1}$, $\forall\ x \in G$ एक स्वाकारिता होगी यदि और केवल यदि G क्रमविनिमेय समूह है।

4. (a) Give an example of each of the following : 4,5¼

(i) A subgroup H of group G which is not normal subgroup of G.

(ii) A subgroup H of non-abelian group G, which is normal subgroup of G.

निम्न में प्रत्येक का एक उदाहरण दीजिए :

(i) एक समूह G का उपसमूह H जो G का विशिष्ट उपसमूह न हो।

(ii) अक्रमविनिमेय समूह G का उपसमूह H जो G का विशिष्ट उपसमूह हो।

(b) Show that every quotient group of a cyclic group is cyclic, but its converse is not necessarily true. 4,5¼

प्रदर्शित कीजिए कि चक्रीय समूह का भागफल समूह चक्रीय होता है, परन्तु इसका विलोम आवश्यक नहीं की सत्य है।

UNIT - III/ इकाई – III

5. (a) Prove that every field is an integral domain but the converse is not necessarily true. 4,5¼

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक क्षेत्र एक पूर्णांकीय प्रान्त है परन्तु इसका विलोम आवश्यक नहीं की सत्य है।

(b) Let R be a ring and $a \in R$, then prove that the normalizer of a in R is a subring of R. 4,5¼

माना R एक वलय है तथा $a \in R$, तो सिद्ध कीजिए कि R में a का प्रसामान्यक R का उपवलय है।

a) Let $(Z_6, +_6, \bullet_6)$ is a ring, where $Z_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$. Is it an integral domain? Explain your answer. 3,4

माना $(Z_6, +_6, \bullet_6)$ एक वलय है, जहां $Z_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$ । क्या यह एक पूर्णांकीय प्रान्त है? अपने उत्तर को विस्तारित कीजिए।

(b) Prove that the characteristic of an integral domain is either zero or prime number. 5,6½

सिद्ध कीजिए कि पूर्णांकीय प्रान्त का अभिलक्षण या तो शून्य है या अखण्डनीय संख्या है।

UNIT - IV/ इकाई – IV

7. (a) Prove that a commutative ring with unity is a field of its is a simple ring. 3½,5

सिद्ध कीजिए कि एक क्रमविनिमेय तत्समकी वलय एक क्षेत्र होता है यदि यह एक सरल वलय हो।

(b) Let R be a commutative ring with unity and I be an ideal of R then prove that quotient ring R/I is also commutative ring with unity. 4½,6

माना R एक क्रमविनिमेय तत्समकी वलय है तथा I, वलय R की एक गुणजावली है तो सिद्ध कीजिए कि विभाग वलय R/I भी क्रमविनिमेय तत्समकी वलय है।

8. (a) Let $V = \{ (a,b) \mid a,b \in R\}$ and F be the field of real numbers. Then examine whether V(F) is a vector space or not for the following defined operations: 4½,6

$(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d)$; $p \odot (a,b) = (p^2a, p^2b), \forall (a,b), (c,d) \in V$ and $p \in F$.

माना V $\{(a,b) \mid a, b \in R\}$ तथा F वास्तविक संख्याओं का क्षेत्र है। जांच कीजिए कि निम्न परिभाषित संक्रियाओं के सापेक्ष V(F) एक सदिश समष्टि है या नहीं :

$(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d)$; $p \cdot (a,b) - p^2a, p^2a), \forall (a,b), (c,d) \in V$ तथा $p \in F$.

(b) Prove that the intersection of any two subspaces of a vector space V(F) is also a subspace. 3¼, 5

सिद्ध कीजिए कि एक सदिश समष्टि की किन्हीं दो उपसमष्टियों का सर्वनिष्ट एक उपसमष्टि होता है।

UNIT - V/ इकाई – V

9. (a) Let S and T be two subspaces of the vector space V(F), then prove that 4,5¼

$L(S \cup T) = S+T$

माना S तथा T सदिश समष्टि V(F) की दो उपसमष्टियाँ हैं तब सिद्ध कीजिए कि

$L(S \cup T) = S+T$

(b) If {x,y,z} is linearly independent subset in vector space V(F) then prove that the set {x+y, y+z,z+x} will also be linearly independent in V(F). 4,5¼

यदि {x,y,z} सदिश समष्टि V(F) में एकघाततः स्वतंत्र उपसमुच्चय है तो सिद्ध कीजिए कि समुच्चय {x+y, y+z, z+x} भी V(F) में एकघाततः स्वतंत्र होगा।

10. (a) Let $V=\{(Z_1, Z_2) | Z_1, Z_2 \in C\}$ be the vector space over the real field R, then prove that the set $S=\{(1,0),$ $(i,0), (0,1), (0,i)\}$ is a basis of V. 4,5¼

माना $V=\{(Z_1, Z_2) | Z_1, Z_2 \in C\}$ वास्तविक संख्याओं के क्षेत्र R पर सदिश समष्टि है, तब सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $S=\{(1,0), (i,0), (0,1), (0,i)\}$, V का आधार है। 4,5¼

(b) Let U(F) and W(F) be two subspaces of vector space V(F) then prove that

$$V=U\oplus W \Leftrightarrow V=U+W \text{ and } U\cap W=\{0\}.$$

माना U(F) तथा W(F), सदिश समष्टि V(F) की दो उपसमष्टियाँ हैं, तो सिद्ध कीजिए कि

$$V=U\oplus W \Leftrightarrow V=U+W \text{ तथा } U\cap W=\{0\}$$