

2175/2125-III**B.A./B.Sc. (Part-II) EXAMINATION - 2022**

(Common for the Faculties of Arts & Science)

(Also Common with Subsidiary Paper of B.A./B.Sc. (Hons.) Part-II)

(Three-Year Scheme of 10+2+3 Pattern)

MATHEMATICS - III

(Numerical Analysis & Vector Calculus)

Time Allowed : 3 Hours

समय : 3 घण्टे

Maximum Marks :

अधिकतम अंक :

40 for Science

54 for Arts

32 for Old Scheme

Note / सूचना :

1. Attempt five questions in all, selecting one question from each unit.

प्रत्येक इकाई में से एक प्रश्न का चयन करते हुए, कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

2. Write your roll number on question paper before start writing answer of questions.

प्रश्नों के उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न-पत्र पर रोल नम्बर अवश्य लिखिए।

3. Calculator is allowed upto 82 ms.

82 ms तक कैलकुलेटर की अनुमति है।

UNIT - I / इकाई - I

1. (a) Prove that :

सिद्ध किजिए :

$$u_0 + {}^x C_1 \Delta u_1 + {}^x C_2 \Delta^2 u_2 + \dots + \Delta^x u_x = u_x + {}^x C_1 \Delta^2 u_{x-1} + {}^x C_2 \Delta^4 u_{x-2} + \dots + \Delta^{2x} u_0$$

(b) The following table gives population of a town during the last six censuses. Estimate, using any suitable interpolation formula, the increase in the population during the period from 1946 to 1948.

निम्न सारणी में अन्तिम छः गणनाओं में एक शहर की जनसंख्या दी हुई है। अन्तर्वेशन के किसी उपर्युक्त सूत्र का प्रयोग करके 1946 से 1948 के अन्तराल में जनसंख्या में वृद्धि की आंकलन कीजिये।

Year : (वर्ष)	1911	1921	1931	1941	1951	1961
Population in Thousands : (जनसंख्या हजारों में)	12	15	20	27	39	52

2/ (a) By means of Newton's divided difference formula, find the values of $f(2)$, $f(8)$ and $f(15)$ from the following table.निम्न सारणी से न्यूटन के विभाजित अन्तर सूत्रद्वारा $f(2)$, $f(8)$ तथा $f(15)$ का मान ज्ञात कीजिए।

$x :$	4	5	7	10	11	13
$f(x) :$	48	100	294	900	1210	2028

(b) Given that : $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 8$, $f(4) = 16$, $f(7) = 128$ Find the value of $f(5)$ with the help of Lagrange's interpolation formula.दिया हुआ है : $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 8$, $f(4) = 16$, $f(7) = 128$ लाग्रांज अन्तर्वेशन सूत्र की सहायता से $f(5)$ का मान ज्ञात कीजिए।

UNIT - II / इकाई - II

3. (a) Use Gauss's forward interpolation formula to find $f(32)$, given that :

$$f(25) = 0.2707, f(30) = 0.3027, f(35) = 0.3386, f(40) = 0.3794$$

गास के अग्र अन्तर्वेशन सूत्र के उपयोग द्वारा $f(32)$ का मान ज्ञात कीजिये जबकि दिया हुआ है:

$$f(25) = 0.2707, f(30) = 0.3027, f(35) = 0.3386, f(40) = 0.3794$$

- (b) Assuming Bessel's interpolation formula, prove that :

$$\frac{d}{dx} (y_x) = \Delta y_x - \left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{24} \Delta^3 y_x - \left(\frac{3}{2}\right) + \dots$$

बेसल अन्तर्वेशन सूत्र को मानकर सिद्ध कीजिये कि :

$$\frac{d}{dx} (y_x) = \Delta y_x - \left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{24} \Delta^3 y_x - \left(\frac{3}{2}\right) + \dots$$

4. (a) Compute the value of following integral by Trapezoidal rule : $\int_{0.2}^{1.4} (\sin x - \log_e x + e^x) dx$

Determine the value also by Simpson's three-eighth rule.

ट्रेपिजोइडल (समलम्बीय) नियम द्वारा निम्न समाकल का मान निकालने के लिए परिकलन कीजिए :

$$\int_{0.2}^{1.4} (\sin x - \log_e x + e^x) dx$$

सिम्पसन के '3/8' नियम द्वारा भी मान ज्ञात कीजिए।

- (b) Find $f'(5)$ from the following table :

निम्न सारणी से $f'(5)$ ज्ञात कीजिये।

$x :$	0	2	3	4	7	9
$f(x) :$	4	26	58	112	466	922

UNIT - III / इकाई - III

5. (a) Solve the equation $x^3 - 3x - 1 = 0$ by Cardon's method.

समीकरण $x^3 - 3x - 1 = 0$ को कार्डन विधि से हल कीजिए।

- (b) Solve the following equation by Ferrari's method :

$$x^4 - 3x^2 - 6x - 2 = 0$$

फैरारी विधि से निम्न समीकरण का हल ज्ञात कीजिए :

$$x^4 - 3x^2 - 6x - 2 = 0$$

6. (a) Using the Bisection method, find the real root of the equation $x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$ lying in the interval $[0, 1]$.

द्विभाजन विधि का प्रयोग करते हुए अन्तराल $[0, 1]$ में समीकरण $x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$ का वास्तविक मूल ज्ञात कीजिए।

- (b) Using Newton's formula, prove that square root of N can be obtained by the following recurrence

formula. $x_{n+1} = x_n \left(1 - \frac{x_n^2 - N}{2N} \right)$ hence find the square root of 26.

न्यूटन सूत्र के प्रयोग से सिद्ध कीजिए कि N का वर्ग मूल निम्न पुनरावृत्ति से प्राप्त किया जा सकता है।

$$x_{n+1} = x_n \left(1 - \frac{x_n^2 - N}{2N} \right)$$

अतः 26 का वर्ग मूल ज्ञात कीजिए।

UNIT - IV / इकाई - IV

7. (a) Solve by Gaussian Elimination method with partial pivoting the following system of equations. निम्न रेखिक समीकरणों के निकाय का हल गॉस विलोपन विधि आंशिक आधार प्रक्रिया सहित ज्ञात कीजिये।

$$x + y + z = 7$$

$$3x + 3y + 4z = 24$$

$$2x + y + 3z = 16$$

- (b) Use Picard's method to find approximate value of y , when $x = 0.1$, $x = 0.2$ given that $y = 1$ when

$$x = 0 \text{ and } \frac{dy}{dx} = x + y. \text{ Also check the result with the exact value.}$$

पिकार्ड विधि का उपयोग कर $x = 0.1$ तथा $x = 0.2$ पर y का सन्निकटन मान प्राप्त कीजिए, दिया हुआ है :

$$\frac{dy}{dx} = x + y \text{ तथा जब } x = 0, y = 1 \text{ परिणामी सन्निकटन मान की तुलना यथार्थ मान से कीजिए।}$$

8. (a) Find the solution of the following system of equations upto fourth order approximation by Jacobi's iterative method.

निम्न समीकरण निकाय का जेकोबी पुनरावृत्ति विधि द्वारा चतुर्थ सन्निकटन तक हल ज्ञात कीजिए।

$$27x_1 + 6x_2 - x_3 = 85$$

$$6x_1 + 15x_2 + 2x_3 = 72$$

$$x_1 + x_2 + 54x_3 = 110$$

- (b) Use Euler's method to determine an approximate value of y at $x = 0.2$ from initial value problem

$$\frac{dy}{dx} = 1 - x + 4y : y(0) = 1 \text{ taking the step size } h = 0.1$$

आयलर विधि का प्रयोग कर प्रारम्भिक मान समस्या $\frac{dy}{dx} = 1 - x + 4y : y(0) = 1$ से $x = 0.2$ पर y का मान ज्ञात

कीजिए, जहाँ पद लम्बाई $h = 0.1$ है।

UNIT - V / इकाई - V

9. (a) A particle moves along the curve $x = t^3 - 4t$, $y = t^2 + 4t$, $z = 8t^2 - 3t^3$, where t is the time. Find the magnitudes of tangential and normal components of its acceleration when $t = 2$.

एक कण वक्र $x = t^3 - 4t$, $y = t^2 + 4t$, $z = 8t^2 - 3t^3$ के अनुदिश गतिमान है जहाँ समय t है। उसके स्पर्श रेखीय व अभिलम्बीय त्वरण $t = 2$ पर ज्ञात कीजिए।

- (b) Find the directional derivative of $\phi = xy + yz + zx$ in the direction of the vector $i + 2j + 2k$ at the point $(1, 2, 0)$.

बिन्दु $(1, 2, 0)$ पर $\phi = xy + yz + zx$ का दिक् अवकलज सदिश $i + 2j + 2k$ की दिशा में ज्ञात कीजिए।

10. (a) Show that if $(xyz)^b (x^a i + y^a j + 2^a k)$ is irrotational vector, then either $b = 0$ or $a = -1$.

प्रदर्शित कीजिए कि यदि $(xyz)^b (x^a i + y^a j + 2^a k)$ आघूर्णीय सदिश है तब या तो $b = 0$ या $a = -1$.

- (b) Apply Gauss's theorem to show that $\int_S \left\{ (x^3 - yz)i - 2x^2 yj + 2k \right\} \cdot \hat{n} ds = \frac{1}{3} a^5$ Where S denotes

the surface of the cube bounded by the co-ordinate planes and the planes $x = y = z = a$.

गॉस प्रमेय के द्वारा सिद्ध कीजिए $\int_S \left\{ (x^3 - yz)i - 2x^2 yj + 2k \right\} \cdot \hat{n} ds = \frac{1}{3} a^5$ जहाँ S, निर्देशी तलों तथा

$x = y = z = a$ तलों से घिरे हुए घन का पृष्ठ हो।

- o O o -