

2175/2125-I

B.A./B.Sc. (Part-II) EXAMINATION, 2022

(Common for the Faculties of Arts & Science)

[Also Common with Subsidiary Paper of B.A./B.Sc. (Hons.) Part-II]

(Three-Year Scheme of 10+2+3 Pattern)

MATHEMATICS-I

(Real Analysis)

Time Allowed : 3 Hours

समय : 3 घण्टे

Maximum Marks :

अधिकतम अंक :

40 for Science,
53 for Arts,
विज्ञान के लिए 40,
कला के लिए 53

Note :

(i) Attempt five questions in all, selecting one question from each Unit.

प्रत्येक इकाई में से एक प्रश्न का चयन करते हुए, कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ii) Write your roll number on question paper before start writing answer of questions.

प्रश्नों के उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न-पत्र पर रोल नम्बर अवश्य लिखिए।

UNIT - I / इकाई - I

1. (a) If F is an ordered field and $x \in F$ then : 4/5½
- (i) $x > 0 \Leftrightarrow -x < 0$
- (ii) $x > 0 \Leftrightarrow x^{-1} > 0$
- यदि F एक क्रमित क्षेत्र है तथा $x \in F$ हो तो :
- (i) $x > 0 \Leftrightarrow -x < 0$
- (ii) $x > 0 \Leftrightarrow x^{-1} > 0$
- (b) Prove that the set Q of rational numbers is not a complete ordered field. 4/5½
- सिद्ध कीजिए की परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q पूर्ण क्रमित क्षेत्र नहीं है।
2. (a) Let A and B be two bounded sets in a metric space (X, d) then $A \cup B$ is also bounded in (X, d) . 4/5½
- माना कि A तथा B एक दूरीक समष्टि (X, d) के दो परिबद्ध समुच्चय हैं तब $A \cup B$ भी (X, d) में परिबद्ध होगा।
- (b) If (X, d) be a metric space, then prove that a subset A of X is closed iff complement of A 4/5
i.e. $A' = X - A$ is open in X .
- यदि (X, d) एक दूरीक समष्टि है तो सिद्ध कीजिये कि X का उपसमुच्चय A तभी और तभी X में संवृत होता है जबकि A का पूरक समुच्चय $A' = X - A$, X में विवृत समुच्चय हो।

UNIT - II / इकाई - II

3. (a) If $\{x_n\}$ is a convergent sequence than its limit is unique. 4/5½
 यदि $\{x_n\}$ एक अभिसारी अनुक्रम हो, तो सीमा अद्वितीय होगी।

- (b) Prove that the following sequence $\{x_n\}$, where $x_1 = \frac{1}{2}$ and $x_{n+1} = \frac{2x_n+1}{3} \forall n \in \mathbb{N}$ is convergent. 4/5
 Also find it's limit.

सिद्ध करो कि निम्न अनुक्रम $\{x_n\}$ जहाँ $x_1 = \frac{1}{2}$ तथा $x_{n+1} = \frac{2x_n+1}{3} \forall n \in \mathbb{N}$ अभिसारी है। इसकी सीमा भी ज्ञात कीजिए।

4. (a) A sequence is convergent iff it is Cauchy's sequence. 4/5½
 एक अनुक्रम अभिसारी है, यदि और केवल यदि यह कोशी अनुक्रम है।
- (b) If a function f is continuous on $[a, b]$ then it attains its supremum and infimum atleast once in $[a, b]$. <https://www.uoronline.com> 4/5
 यदि फलन f संवृत अन्तराल $[a, b]$ में संतत हो तो फलन $[a, b]$ में कम से कम एक बार अपने उच्चक एवं निम्नक को प्राप्त करता है।

UNIT - III / इकाई - III

5. (a) Show that the function $f(x) = \begin{cases} x \left(1 + \frac{1}{3} \sin \log x^2\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 4/5½

is continuous everywhere but differential co-efficient does not exist at $x=0$.

प्रदर्शित कीजिए कि फलन $f(x) = \begin{cases} x \left(1 + \frac{1}{3} \sin \log x^2\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

सर्वत्र संतत है परन्तु $x=0$ पर अवकल गुणांक विद्यमान नहीं है।

- (b) State and prove Rolle's theorem. 4/5
 रोल प्रमेय का कथन लिखिए और सिद्ध कीजिए।

6. (a) Show that the function f defined by $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 4/5½

possesses partial derivatives at $(0, 0)$ but is not differentiable at the origin.

प्रदर्शित कीजिए कि फलन f जहाँ $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

के मूलबिन्दु $(0, 0)$ पर आंशिक अवकलज विद्यमान है, परन्तु मूलबिन्दु पर अवकलनीय नहीं है।

- (b) Show that the function $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 4/5

has partial derivatives at $(0, 0)$ but not the directional derivative in any direction.

प्रदर्शित कीजिए कि फलन $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

के $(0, 0)$ पर आंशिक अवकलज विद्यमान है, परन्तु किसी भी दिशा में दिक् अवकलज विद्यमान नहीं है।

UNIT - IV / इकाई - IV

7. (a) Show that a constant function is R-integrable. 4/5½
सिद्ध कीजिए कि स्थिर मान फलन R-समाकलनीय है।
- (b) If, $f, g \in R [a, b]$ then prove that $f \pm g \in R [a, b]$. 4/5
यदि $f, g \in R [a, b]$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $f \pm g \in R [a, b]$
8. (a) If f be a continuous function defined on $[a, b]$ prove that $f \in R [a, b]$. 4/5½
यदि f फलन, $[a, b]$ में संतत है तो सिद्ध कीजिए कि $f \in R [a, b]$
- (b) State and prove fundamental theorem of Integral Calculus. 4/5
समाकलन गणित का मूल प्रमेय का कथन एवं सिद्ध करें।

UNIT - V / इकाई - V

9. (a) Test uniform convergence of the following series. 4/5½
निम्न श्रेणी के एकसमान अभिसरण के लिए परीक्षण कीजिए।

$$\sum \left| \frac{nx}{1+n^2x^2} \right|, 0 \leq x \leq 1$$

- (b) Prove that following series is uniformly convergent. 4/5

$$\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots \text{ if, } 0 < a \leq x \leq b \leq 2\pi$$

सिद्ध कीजिए कि निम्न श्रेणी एकसमान अभिसारी श्रेणी है $\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots$

यदि $0 < a \leq x \leq b \leq 2\pi$

10. (a) Show that the series $1 - x + x^2 - \dots$ can be integrated term by term in the interval $[0, 1]$ although it is not uniformly convergent in $[0, 1]$. 4/5½

सिद्ध कीजिए कि श्रेणी $1 - x + x^2 - \dots$ का अन्तराल $[0, 1]$ में पदशः समाकलन किया जा सकता है यद्यपि यह $[0, 1]$ एकसमान अभिसृत नहीं है।

- (b) If $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$, $x \in [0, 1] \forall n \in \mathbb{N}$ then show that limit function f is continuous but $\{f_n\}$ does not converge to f uniformly. 4/5

यदि $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$, $x \in [0, 1] \forall n \in \mathbb{N}$ के लिये सिद्ध कीजिए कि सीमा फलन f संतत है, परन्तु $\{f_n\}$ एकसमान f को अभिसरण नहीं करता है।

- o o o -