This question paper contains 4 printed pages. Roll No. . ...

B.A./B.Sc. (Part–II)

2175/2125–I

B.A./B.Sc. (Part–II) Examination, 2021

(Common for the Faculties of Arts & Science)

[Also Common with Subsidiary Paper of B.A./B.Sc. (Hons.) Part–II]

(Three-Year Scheme of 10+2+3 Pattern)

MATHEMATICS–I

(Real Analysis)

Time Allowed : 3 Hours	**Maximum Marks :** **40 for Science**
समय : 3 घण्टे	**अधिकतम अंक :** **53 for Arts**

Note :

(1) Attempt **five** questions in all, selecting **one** question from each Unit.
प्रत्येक इकाई में से एक प्रश्न का चयन करते हुए, कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(2) Write your roll number on question paper before start writing answer of questions.
प्रश्नों के उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न-पत्र पर रोल नम्बर अवश्य लिखिए।

UNIT-I (इकाई-I)

1. (a) Prove that between two different real numbers there lie an infinite number of rational numbers. **4/5**

सिद्ध कीजिए कि किन्हीं दो भिन्न वास्तविक संख्याओं के मध्य अनन्त परिमेय संख्याएँ विद्यमान होती हैं।

(b) Show that the intersection of a finite collection of open sets is an open set. **4/5**

प्रदर्शित कीजिए कि विवृत समुच्चयों का प्रत्येक परिमित सर्वनिष्ठ निर्धारण एक विवृत समुच्चय होता है।

2. (a) Let (X, d) be a metric space and A is a non-empty subset of X. then prove that :

$$|d(x,A) - d(y,A)| \le d(x,y) \ \ \forall \ \ x,y \in A.$$ 4/5

माना कि (X, d) एक दूरीक समष्ठि है एवं A, X का एक अरिक्त उपसमुच्चय है तो सिद्ध कीजिए कि :

$$|d(x,A) - d(y,A)| \le d(x,y) \ \ \forall \ \ x,y \in A.$$

(b) Prove that in a metric space, every closed sphere is a closed set. 4/5

सिद्ध कीजिए कि एक दूरीक समष्टि में प्रत्येक संवृत गोलक एक संवृत समुच्चय होता है।

UNIT-II (इकाई-II)

3. (a) Prove that every bounded sequence has at least one limit point. 4/5

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिबद्ध अनुक्रम का कम से कम एक सीमा बिन्दु होता है।

(b) Show that if $<x_n>$ is a convergent sequence then its limit is unique. 4/5

प्रदर्शित कीजिए कि यदि $<x_n>$ एक अभिसारी अनुक्रम हो, तो सीमा अद्वितीय होगी।

(a) By Cauchy's general principle of convergence for sequences. Prove that the sequence $<x_n>$ where $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$ is not convergent. 4/5

कोशी के अभिसरण के सामान्य सिद्धांत से सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $<x_n>$ जहाँ $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$ अभिसारी नहीं है।

(b) Prove that if a function is continuous on [a, b] then it is bounded in that internal. 4/5

सिद्ध कीजिए कि यदि फलन संवृत अन्तराल [a, b] में सतत् है तो वह उस अन्तराल में परिबद्ध होता है।

UNIT-III (इकाई-III)

5. (a) State and prove Darboux theorem. 4/6

डार्बू प्रमेय का कथन लिखिए और सिद्ध कीजिए।

(b) Verify Roll's theorem for the following functions :

$$f(x) = e^x \sin x, \ \forall \ x \in [0, \pi].$$ 4/5

निम्न फलन के लिए रोल प्रमेय का सत्यापन कीजिए :

$$f(x) = e^x \sin x, \ \forall \ x \in [0, \pi].$$

6. (a) Show that the function f, defined by :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 \div y^2}}, & \text{if } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{if } x = y = 0 \end{cases}$$

possesses partial derivative but is not differentiable at the origin. 4/6

प्रदर्शित कीजिए कि फलन f, जहाँ :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{यदि } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{यदि } x = y = 0 \end{cases}$$

के मूलबिन्दु पर आंशिक अवकलज विद्यमान है, परन्तु मूलबिन्दु पर अवकलनीय नहीं है।

(b) Show that the function :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

has partial derivatives at (0, 0) but not the directional derivative in any direction. 4/5

प्रदर्शित कीजिए कि फलन :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

के (0, 0) पर आंशिक अवकलज विद्यमान है, परन्तु किसी भी दिशा में दिक् अवकलज विद्यमान नहीं है।

UNIT–IV (इकाई–IV)

7. (a) If $f(x)=x, x\in[0,1]$, then show that f is R-integrable on [0, 1] and that $\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$. 4/6

यदि $f(x)=x, x\in[0,1]$, तो सिद्ध कीजिए कि f अन्तराल [0, 1] पर R-समाकलनीय है तथा $\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$.

(b) Prove that every monotonic function f is R-integrable. 4/5

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक एकदिष्ठ फलन R-समाकलनीय होता है।

8. (a) If $f\in R[a,b]$ and if there exists a primitive function ϕ on interval [a, b] then show :

$$\int_a^b f(x)dx=\phi(b)-\phi(a).$$ 4/6

यदि $f\in R[a,b]$ तथा फलन f का पूर्वग ϕ अन्तराल [a, b] पर विद्यमान है तो प्रदर्शित कीजिए :

$$\int_a^b f(x)dx=\phi(b)-\phi(a).$$

(b) Let function $f:[a,b]\to R$ where :

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

then prove that f is of bounded variation. 4/5

माना कि फलन $f:[a,b]\to R$ जहाँ :

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{\pi}{x}\right), & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

है तो सिद्ध कीजिए कि f परिबद्ध विचरण का है।

UNIT-V (इकाई-V)

9. (a) Show that $<f_n>$ be a sequence of real valued functions defined on the set E converges uniformly on E iff for every $\epsilon>0$ there exists a positive integer $n_0(\epsilon)\in N$ such that : https://www.uoronline.com

$$m,n\geq n_0 \Rightarrow |f_m(x)-f_n(x)|<\epsilon \quad \forall x\in E.$$ 4/6

प्रदर्शित कीजिए किसी समुच्चय E पर परिभाषित वास्तविक मान फलनों का अनुक्रम $<f_n>$, E पर एक समान अभिसरण होता है यदि और केवल यदि प्रत्येक $\epsilon>0$ के लिए एक ऐसे $n_0(\epsilon)\in N$ का अस्तित्व हो कि :

$$m,n\geq n_0 \Rightarrow |f_m(x)-f_n(x)|<\epsilon \quad \forall x\in E.$$

(b) Test the series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$ for uniform convergence in any finite internal. 4/5

श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$ का किसी भी परिमित अन्तराल में एक समान अभिसरण का परीक्षण कीजिए।

10. (a) Examine the series $\sum_{n=1}^{\infty} xe^{-nx}$ for uniform convergence and continuity of its function at $x = 0$. 4/6

श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} xe^{-nx}$ की एक समान अभिसारिता के लिए तथा इसके योग की $x=0$ पर सांतत्यता के लिए जाँच कीजिए।

(b) If $<f_n(x)>$ be a sequence of functions on [a, b] and converges uniformly to the function $f(x)$ on [a, b] and if f_n is R-integrable on [a, b] then show that f is R-integrable. 4/5

यदि किसी अन्तराल [a, b] पर परिभाषित वास्तविक मान फलनों का अनुक्रम $<f_n(x)>$, [a, b] पर $f(x)$ को एक समान अभिसृत होता है तथा यदि f_n अन्तराल [a, b] पर R-समाकलनीय है तब प्रदर्शित कीजिए f, R-समाकलनीय है।

*****