

This question paper contains 4 printed pages.

Roll No. .

.....

B.A./B.Sc. (Part-II)

2175/2125-I

B.A./B.Sc. (Part-II) Examination, 2021

(Common for the Faculties of Arts & Science)

[Also Common with Subsidiary Paper of B.A./B.Sc. (Hons.) Part-II]

(Three-Year Scheme of 10+2+3 Pattern)

MATHEMATICS-I

(Real Analysis)

Time Allowed : 3 Hours

Maximum Marks :

समय : 3 घण्टे

अधिकतम अंक :

40 for Science

53 for Arts

Note :

- (1) Attempt five questions in all, selecting one question from each Unit.

प्रत्येक इकाई में से एक प्रश्न का चयन करते हुए, कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

- (2) Write your roll number on question paper before start writing answer of questions.

प्रश्नों के उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न-पत्र पर रोल नम्बर अवश्य लिखिए।

UNIT-I (इकाई-I)

1. (a) Prove that between two different real numbers there lie an infinite number of rational numbers. 4/5

सिद्ध कीजिए कि किन्हीं दो भिन्न वास्तविक संख्याओं के मध्य अनन्त परिमेय संख्याएँ विद्यमान होती हैं।

- (b) Show that the intersection of a finite collection of open sets is an open set. 4/5

प्रदर्शित कीजिए कि विवृत समुच्चयों का प्रत्येक परिमित सर्वनिष्ठ निर्धारण एक विवृत समुच्चय होता है।

2. (a) Let (X, d) be a metric space and A is a non-empty subset of X . then prove that :

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y) \quad \forall x, y \in A. \quad 4/5$$

माना कि (X, d) एक दूरीक समष्टि है एवं A, X का एक अरिक्त उपसमुच्चय है तो सिद्ध कीजिए कि :

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y) \quad \forall x, y \in A.$$

- (b) Prove that in a metric space, every closed sphere is a closed set. 4/5
सिद्ध कीजिए कि एक दूरिक समष्टि में प्रत्येक संवृत गोलक एक संवृत समुच्चय होता है।

UNIT-II (इकाई-II)

3. (a) Prove that every bounded sequence has at least one limit point. 4/5
सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिबद्ध अनुक्रम का कम से कम एक सीमा बिन्दु होता है।
- (b) Show that if $\langle x_n \rangle$ is a convergent sequence then its limit is unique. 4/5
प्रदर्शित कीजिए कि यदि $\langle x_n \rangle$ एक अभिसारी अनुक्रम हो, तो सीमा अद्वितीय होगी।
- (a) By Cauchy's general principle of convergence for sequences. Prove that the sequence $\langle x_n \rangle$ where $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ is not convergent. 4/5
कोशी के अभिसरण के सामान्य सिद्धांत से सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\langle x_n \rangle$ जहाँ $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ अभिसारी नहीं है।
- (b) Prove that if a function is continuous on $[a, b]$ then it is bounded in that interval. 4/5
सिद्ध कीजिए कि यदि फलन संवृत अन्तराल $[a, b]$ में सतत् है तो वह उस अन्तराल में परिबद्ध होता है।

UNIT-III (इकाई-III)

5. (a) State and prove Darboux theorem. 4/6
डारबू प्रमेय का कथन लिखिए और सिद्ध कीजिए।
- (b) Verify Roll's theorem for the following functions :
 $f(x) = e^x \sin x, \forall x \in [0, \pi]$. 4/5
निम्न फलन के लिए रोल प्रमेय का सत्यापन कीजिए :
 $f(x) = e^x \sin x, \forall x \in [0, \pi]$.
6. (a) Show that the function f , defined by :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{if } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{if } x = y = 0 \end{cases}$$

possesses partial derivative but is not differentiable at the origin. 4/6
प्रदर्शित कीजिए कि फलन f , जहाँ :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{यदि } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{यदि } x = y = 0 \end{cases}$$

के मूलबिन्दु पर आंशिक अवकलज विद्यमान है, परन्तु मूलबिन्दु पर अवकलनीय नहीं है।

(b) Show that the function :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

has partial derivatives at (0, 0) but not the directional derivative in any direction.

4/5

प्रदर्शित कीजिए कि फलन :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

के (0, 0) पर आंशिक अवकलज विद्यमान है, परन्तु किसी भी दिशा में दिक् अवकलज विद्यमान नहीं है।

UNIT-IV (इकाई-IV)

7. (a) If $f(x) = x, x \in [0,1]$, then show that f is R-integrable on $[0, 1]$ and that $\int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}$.

4/6

यदि $f(x) = x, x \in [0,1]$, तो सिद्ध कीजिए कि f अन्तराल $[0, 1]$ पर R-समाकलनीय है तथा

$$\int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}.$$

(b) Prove that every monotonic function f is R-integrable. 4/5

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक एकदिष्ट फलन R-समाकलनीय होता है।

8. (a) If $f \in R[a,b]$ and if there exists a primitive function ϕ on interval $[a, b]$ then show :

$$\int_a^b f(x) \, dx = \phi(b) - \phi(a). \quad 4/6$$

यदि $f \in R[a,b]$ तथा फलन f का पूर्वग ϕ अन्तराल $[a, b]$ पर विद्यमान है तो प्रदर्शित कीजिए :

$$\int_a^b f(x) \, dx = \phi(b) - \phi(a).$$

(b) Let function $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ where :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

then prove that f is of bounded variation.

4/5

माना कि फलन $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ जहाँ :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

है तो सिद्ध कीजिए कि f परिवर्द्ध विचरण का है।

UNIT-V (इकाई-V)

9. (a) Show that $\langle f_n \rangle$ be a sequence of real valued functions defined on the set E converges uniformly on E iff for every $\epsilon > 0$ there exists a positive integer $n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ such that : <https://www.uoronline.com>

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon \quad \forall x \in E. \quad 4/6$$

प्रदर्शित कीजिए किसी समुच्चय E पर परिभाषित वास्तविक मान फलनों का अनुक्रम $\langle f_n \rangle$, E पर एक समान अभिसरण होता है यदि और केवल यदि प्रत्येक $\epsilon > 0$ के लिए एक ऐसे $n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ का अस्तित्व हो कि :

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon \quad \forall x \in E.$$

- (b) Test the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}$ for uniform convergence in any finite interval. 4/5

श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}$ का किसी भी परिमित अन्तराल में एक समान अभिसरण का परीक्षण कीजिए।

10. (a) Examine the series $\sum_{n=1}^{\infty} xe^{-nx}$ for uniform convergence and continuity of its function at $x = 0$. 4/6

श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} xe^{-nx}$ की एक समान अभिसरिता के लिए तथा इसके योग की $x = 0$ पर सांतत्यता के लिए जाँच कीजिए।

- (b) If $\langle f_n(x) \rangle$ be a sequence of functions on $[a, b]$ and converges uniformly to the function $f(x)$ on $[a, b]$ and if f_n is \mathbb{R} -integrable on $[a, b]$ then show that f is \mathbb{R} -integrable. 4/5

यदि किसी अन्तराल $[a, b]$ पर परिभाषित वास्तविक मान फलनों का अनुक्रम $\langle f_n(x) \rangle$, $[a, b]$ पर $f(x)$ को एक समान अभिसृत होता है तथा यदि f_n अन्तराल $[a, b]$ पर \mathbb{R} -समाकलनीय है तब प्रदर्शित कीजिए f , \mathbb{R} -समाकलनीय है।
