This question paper contains 4 printed pages. Roll No. ....

B.A./B.Sc. (Hons.) (Part-II) **Math.**

2213-V

B.A./B.Sc. (Hons.) (Part-II) Examination, 2019

(Three-Year Scheme of 10+2+3 Pattern)

MATHEMATICS

Paper-V

(Honours Subject)

(Real Analysis and Metric Space)

Time Allowed : Three Hours — Maximum Marks : 85

समय : 3 घंटे — अधिकतम अंक : 85

Answer of all the questions (short answer as well as descriptive) are to be given in the main answer-book only. Answers of short answer type questions must be given in sequential order. Similarly all the parts of one question of descriptive part should be answered at one place in the answer-book. One complete question should not be answered at different places in the answer-book. Write your roll number on question paper before start writing answers of questions.

सभी (लघूत्तरात्मक तथा वर्णनात्मक) प्रश्नों के उत्तर मुख्य उत्तर-पुस्तिका में ही लिखिए। लघूत्तरात्मक प्रश्नों के उत्तर प्रश्नों के क्रमानुसार ही दीजिए। इसी प्रकार किसी भी एक वर्णनात्मक प्रश्न के अन्तर्गत पूछे गए विभिन्न प्रश्नों के उत्तर, उत्तर-पुस्तिका में अलग-अलग स्थानों पर हल करने के बजाय एक ही स्थान पर क्रमानुसार हल कीजिए। प्रश्नों के उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न-पत्र पर रोल नम्बर अवश्य लिखें।

Attempt **five** questions in all, selecting **one** question from each Unit. All questions carry equal marks.

प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न का चयन करते हुए, कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

UNIT-I (इकाई-I)

1. (a) A subset A of real numbers in open if and only if it is a Union of open intervals.

   वास्तविक संख्याओं का उपसमुच्चय A विवृत है यदि और केवल यदि यह विवृत अन्तरालों का संघ है।

   (b) A subset FCR is closed iff its complenent is open.

   एक उपसमुच्चय FCR संवृत है यदि और केवल यदि इसका पूरक विवृत है।

2. (a) Define compact set and prove that the set R of real numbers is not compact.

संहत समुच्चय को परिभाषित कीजिए और प्रदर्शित कीजिए वास्तविक संख्याओं का समुच्चय R संहत नहीं है।

(b) Prove that the sequence {Xn} where $Xn = \frac{2n-7}{3n+2}, \ \forall n \in N$ is

(i) Monolanically increasing

(ii) Bounded

(iii) Convergent

(iv) $\lim_{n \to \infty} Xn = 2/3$

सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम {Xn} जहाँ $Xn = \frac{2n-7}{3n+2}, \ \forall n \in N$

(i) एक दिष्ट वर्धमान है।

(ii) परिबद्ध है।

(iii) अभिसारी है।

(iv) $\lim_{n \to \infty} Xn = 2/3$

Unit-II (इकाई-II)

3. (a) By Cauchy's general principle of conversence, prove that the sequence <Xn> defined by $Xn = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}, \forall n \in N$ is convergent.

प्रदर्शित कीजिए कि वास्तविक अनुक्रम <Xn> जहाँ $Xn = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}, \forall n \in N$ अभिसारी है।

(b) Define cauchy sequence and prove that every cauchy sequence is bounded.

कोशी अनुक्रम को परिभाषित कीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक कोशी अनुक्रम परिबद्ध है।

4. (a) Prove that if a function f(x) is continuous in a closed interval [a, b] then it is bounded in that interval.

सिद्ध कीजिए कि यदि फलन f(x) संवृत अंतराल [a, b] में संतत है तब यह उस अंतराल में परिबद्ध है।

(b) Examine the continuity and differentiability of the function $f(x) = |x-1| + |x-2|$ in the interval [0, 2].

फलन $f(x) = |x-1| + |x-2|$ को अन्तराल [0, 2] में सांतत्यता एवं अवकलनीयता का परीक्षण कीजिए।

Unit-III (इकाई-III)

5. (a) Let P_1 and P_2 be two partitions of [a, b]. The $L(F, P_1) \le U(F, P_2)$ and $L(F, P_2) \le U(F, P_1)$

i.e. any lower Darboux sum does not exeed any Upper Darboux sum.

यदि P_1 तथा P_2 [a, b] के दो विभाजन है, तव $L(F, P_1) \le U(F, P_2)$ तथा $L(F, P_2) \le U(F, P_1)$ अर्थात कोई भी निम्न डार्बू योग कोई भी उपरि डार्बू योग से अधिक नहीं हो सकता है।

(b) Let a real valued function F be defined on [0, 1] by $f(x) = \begin{cases} 1 \ , & \text{if } x \ne 1/2 \\ 0 \ , & \text{if } x \ne 1/2 \end{cases}$

show that F E R [0, 1].

यदि [0, 1] पर परिभाषित एक वास्तविक मान फलन इस प्रकार से परिभाषित है कि

$$f(x) = \begin{cases} 1 \ , & \text{if } x \ne 1/2 \\ 0 \ , & \text{if } x = 1/2 \end{cases}$$

प्रदर्शित कीजिए कि $F \in R[0, 1]$.

6. (a) Prove that every bounded function need not be R-integrable.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिबद्ध फलन आवश्यक रूप से R-समाकलनीय नहीं होता है।

(b) Let F and g be two real valued functions defined by $F(x) = x$ and $g(x) = e^x$ in [−1, 1]

verify second mean value theorem for F(x) and g(x) in [−1, 1].

यदि F तथा g दो वास्तविक फलन है जो अन्तराल [−1, 1] में $F(x) = x$ तथा $g(x) = e^x$ द्वारा परिभाषित है। F(x) तथा g(x) के लिए अंतराल [−1, 1] में द्वितीय मध्यमान प्रमेय जाँच कीजिए।

Unit-IV (इकाई-IV)

7. (a) Let $\sum_{n=1}^{\infty} Un(x)$ be a series of real valued functions defined on DCR. If {Mn} be a sequence of positive numbers such that $|Un(x)| \le Mn \ \forall X \in E$ for each and $n \in N$, then the series $\sum_{n=1}^{\infty} Un(x)$ converges uniformly on D if the series $\sum_{n=1}^{\infty} Mn$ converges.

यदि $\sum_{n=1}^{\infty} Un(x)$, DCR पर परिभाषित वास्तविक मान फलनों की श्रेणी है। यदि {Mn} धनात्मक संख्याओं का अनुक्रम इस प्रकार से है कि $|Un(x)| \le Mn \ \forall X \in E$ तथा $n \in N$, तव श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} Un(x)$, D पर एक समान अभिसारी है यदि श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} Mn$ अभिसारी है।

P.T.O

(b) Test for uniform convergence of a series of function $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ defined on [0, 1].

फलनों की श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ जो कि [0, 1] पर परिभाषित है, इस श्रेणी की [0, 1] पर एकसमान अभिसरण के लिए जांच कीजिए।

8. (a) Show that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + n^4 x^2}, x$ is uniformly convergent for all values of x and that it may be diferentiated term-by-term.

प्रदर्शित कीजिए कि श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + n^4 x^2}, x$ के सभी मानों के लिए एकसमान अभिसारी है तथा इसका पदशः अवकलन किया जा सकता है।

(b) Test for termwise integration of the series $\sum_{n=1}^{\infty} Un(x)$ whose sum of first n term in $Fn(x) = nxe^{-nx^2}$ in [0, 1].

श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} Un(x)$ जिसका प्रथम n पदों का योग $Fn(x) = nxe^{-nx^2}$ है का, [0, 1] में पदशः समाकलन के लिए परीक्षण कीजिए।

Unit-V (इकाई-V)

9. (a) If (x, d) be a metric space then prove that $d(x, y) \geq |d(x, z) - d(z, y)| \forall x, y \in X$.

यदि (x, d) एक दूरीक समष्टि है तो दर्शाइए $d(x, y) \geq |d(x, z) - d(z, y)| \forall x, y \in X$.

(b) Every open sphere in a metric space in an open set.

दूरीक समष्टि X का प्रत्येक विवृत्त गोला एक विवृत्त समुच्चय है।

10. (a) Let x be a metric space. A subset F of the metric space X is closed if and only if it contains each of its limit points.

माना X एक दूरीक समष्टि है। दूरीक समष्टि X का उपसमुच्चय F संवृत्त-है यदि और केवल यदि यह अपने समस्त सीमा बिन्दुओं को समाहित करता है।

(b) Let X be a metric space. If a sequence of points {Xn} in X converges in X then its limit in unique.

माना X एक दूरीक समष्टि है। यदि X के बिन्दुओं का अनुक्रम {Xn} X में अभिसृत होता है तो इसकी सीमा अद्वितीय है।

*****