

1125/1175-III B.A./B.Sc. (Part-I)**B.A./B.Sc. (Part-I) EXAMINATION - 2022**

(Common for the Faculties of Arts & Science)

[Also Common with Subsidiary Paper of B.A./B.Sc. (Hons.) Part-I]

(Three-Year Scheme of 10+2+3 Pattern)

MATHEMATICS-III

(Analytic Geometry & Optimization Theory)

Time Allowed : 3 Hours

Maximum Marks : 40 for Science, 53 for Arts

समय : 3 घण्टे

अधिकतम अंक : विज्ञान के लिए 40 तथा कला के लिए 53

Note :

1. Attempt five questions in all, selecting one question from each Unit.
प्रत्येक इकाई में से एक प्रश्न का चयन करते हुए, कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए।
2. All questions carry equal marks.
सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।
3. Write your roll number on question paper before start writing answer of questions.
प्रश्नों के उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न-पत्र पर रोल नम्बर अवश्य लिखें।

UNIT - I / इकाई - I

1. (a) Prove that the equation $\frac{1}{r} = 1 + e \cos \theta$ and $\frac{1}{r} = -1 + e \cos \theta$ represents the same conic.

सिद्ध कीजिए कि समीकरण $\frac{1}{r} = 1 + e \cos \theta$ तथा $\frac{1}{r} = -1 + e \cos \theta$ एक जैसे शंकु को प्रदर्शित करती है।

- (b) Prove that the sum of the reciprocal of two perpendicular focal chord is constant.

सिद्ध कीजिए कि किसी शंकु में किन्हीं दो लम्बवत् नाभीय जीवा के व्युत्क्रम का योग अचर होगा।

2. (a) If PSP' is a focal chord of the conic $\frac{1}{r} = 1 + e \cos \theta$, then prove that the tangents at P and P' intersects on the directrix.

यदि PSP' किसी शंकु $\frac{1}{r} = 1 + e \cos \theta$ की नाभीय जीवा है, तो सिद्ध करो कि बिन्दु P एवं P' पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ एक दूसरे को नियता पर काटती हैं।

- (b) Find the equation of the asymptotes of the conic $\frac{1}{r} = 1 + e \cos \theta$.

शंकु $\frac{1}{r} = 1 + e \cos \theta$ के अनन्तस्पर्शियों के समीकरण ज्ञात कीजिए।

UNIT - II / इकाई - II

3. (a) Find the equation of sphere which passes through $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ points and whose radius is minimum.

उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जो $(1, 0, 0)$; $(0, 1, 0)$; $(0, 0, 1)$ बिन्दुओं से गुजरता है एवं जिसकी त्रिज्या न्यूनतम है।

- (b) Prove that the equation

$$4x^2 - y^2 + 2z^2 + 2xy - 3yz + 12x - 11y + 6z + 4 = 0$$

represents the cone whose vertex is $(-1, -2, -3)$.

सिद्ध कीजिए कि समीकरण

$$4x^2 - y^2 + 2z^2 + 2xy - 3yz + 12x - 11y + 6z + 4 = 0$$

एक शंकु को निरूपित करता है जिसका शीर्ष $(-1, -2, -3)$ है।

4. (a) Prove that the plane $ax + by + cz = 0$ cuts the cone $yz + zx + xy = 0$ in perpendicular lines if,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0.$$

सिद्ध कीजिए कि समतल $ax + by + cz = 0$ शंकु $yz + zx + xy = 0$ को लम्ब रेखाओं में काटता है यदि

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0.$$

- (b) Find the equation of cone whose vertex is (α, β, γ) and base is $ax^2 + by^2 = 1, z = 0$.

उस शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष (α, β, γ) और आधार $ax^2 + by^2 = 1, z = 0$ है।

UNIT - III / इकाई - III

5. (a) Find the equation of cylinder whose generating lines are parallel to line $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$ and which intersects ellipse $x^2 + 2y^2 = 1, z = 0$.

उस बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी जनक रेखाएँ रेखा $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$ के समान्तर हैं, तथा जो दीर्घवृत्त

$x^2 + 2y^2 = 1, z = 0$ को प्रतिच्छेद करता है।

- (b) Find the equation of enveloping cylinder of $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ and whose generators are parallel

to the line $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$.

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ के उस अन्वालोपी बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए। जिनकी जनक रेखाएँ $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ के

समान्तर हैं।

6. (a) Find the equation of the tangent plane to the conicoid.
 $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$ at the point (α, β, γ)
 शांकवज $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$ के किसी बिन्दु (α, β, γ) पर स्पर्श तल का समीकरण ज्ञात कीजिए।
- (b) Find the length of normal chord through the points $P(\alpha, \beta, \gamma)$ of the ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ के बिन्दु $P(\alpha, \beta, \gamma)$ पर खींचे गए अभिलम्ब जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

UNIT - IV / इकाई - IV

7. (a) Find the equations to the generating lines of the hyperboloid $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$, which passes through the points $(2, 3, -4)$.

अतिपरवलयज $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$ के बिन्दु $(2, 3, -4)$ से गुजरने वाली जनक रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए।

- (b) Prove that no two generator of the same system of a hyperboloid of one sheet intersect.
 सिद्ध कीजिए कि एक पृष्ठीय अतिपरवलयज के एक ही निकाय के कोई दो जनक परस्पर प्रतिच्छेद नहीं करते।

8. (a) Reduce the equation
 $F(x, y, z) = 36x^2 + 4y^2 + z^2 - 4yz - 12zx + 24xy + 4x - 16y - 26z - 3 = 0$ into canonical form and state the nature of the surface.

समीकरण $F(x, y, z) = 36x^2 + 4y^2 + z^2 - 4yz - 12zx + 24xy + 4x - 16y - 26z - 3 = 0$ का मानक रूप में समानयन कीजिए तथा इसके द्वारा प्रदर्शित पृष्ठ बताइए।

- (b) Find the principal planes and principal directions of the following conicoid.

निम्न शांकवज की मुख्य दिशाएँ एवं मुख्य समतल ज्ञात कीजिए।

$$8x^2 + 7y^2 + 3z^2 - 8yz + 4zx - 12xy + 2x - 8y + 1 = 0$$

UNIT - V / इकाई - V

9. (a) Prove that the intersection of two convex sets is also a convex set.

सिद्ध कीजिए कि दो अवमुख समुच्चयों का सर्वनिष्ठ भी एक अवमुख समुच्चय होता है।

- (b) Find all the basic feasible solutions for the system of equations :

निम्न समीकरण के लिए सभी आधारी सुसंगत हलों को ज्ञात कीजिए :

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 30$$

$$3x_1 - x_2 + 7x_3 = 21$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

10. (a) Prove that the set of all feasible solutions of linear programming problem is a convex set.

सिद्ध कीजिए कि रैखिक प्रोग्रामन समस्या के सभी सुसंगत हलों का समुच्चय एक अवमुख समुच्चय होता है।

(b) Find the dual of the following L.P.P. :

निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या की द्वैती ज्ञात कीजिए।

$$\text{Max. } z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

$$\text{s.t. } x_1 + x_2 + x_3 \leq 7$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 13$$

$$3x_1 - x_2 + x_3 \leq 5$$

$$\text{with } x_1, x_2, x_3 \geq 0$$