

B.A./B.Sc./B.Ed. (Part-I)

159-II

**B.A./B.Sc./B.Ed. (Four Year Scheme) (Part-I)
Examination, 2021**

Paper-B.A./B.Sc./B.Ed. 05/06/07 (G-B)

MATHEMATICS-II

(Calculus)

Time Allowed : 3 Hours

Maximum Marks : 40 for Science

समय : 3 घण्टे

54 for Arts

Note :

- (1) No supplementary answer-book will be given to any candidate. Hence the candidates should write their answers precisely in the main answer-book only.
- (2) All the parts of one question should be answered at one place in the answer-book. One complete question should not be answered at different places in the answer-book.
- (3) Attempt five questions in all, selecting one question from each Unit. All questions carry equal marks.
- (4) Write your roll number on question paper before start writing answers of questions.

सूचना :

- (1) किसी भी परीक्षार्थी को पूरक उत्तर-पुस्तिका नहीं दी जाएगी। अतः परीक्षार्थियों को चाहिए कि वे मुख्य उत्तर-पुस्तिका में ही समस्त प्रश्नों के उत्तर सही ढंग से लिखें।
- (2) किसी भी एक प्रश्न के अन्तर्गत पूछे गए विभिन्न प्रश्नों के उत्तर, उत्तर-पुस्तिका में अलग-अलग स्थानों पर हल करने के बजाय एक ही स्थान पर हल करें।
- (3) प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न का चयन करते हुए, कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।
- (4) प्रश्नों के उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न-पत्र पर रोल नम्बर अवश्य लिखिए।

UNIT-I (इकाई-I)

1. (a) If x is positive, then test the convergence of the following series :

यदि x धनात्मक हो, तो निम्न श्रेणी के अभिसरण का परीक्षण कीजिए :

$$\frac{2}{3}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 x^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^3 x^3 + \left(\frac{5}{6}\right)^4 x^4 + \dots$$

- (b) Test the convergence of the following series :

निम्न श्रेणी के अभिसरण की जाँच कीजिए :

$$\frac{(\log 2)^2}{2^2} + \frac{(\log 3)^2}{3^2} + \dots + \frac{(\log n)^2}{n^2} + \dots$$

2. (a) Prove that the following series is absolutely convergent :

सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित श्रेणी निरपेक्ष अभिसारी है :

$$1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{4\sqrt{4}} + \dots$$

- (b) State and prove Taylor's theorem with Schlomitch and Roche form of remainder.

शेकलोमिच एवं रोशे का शेष वाला टेलर प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

UNIT-II (इकाई-II)

3. (a) For the cycloid $x = a(1 - \cos t)$, $y = a(t + \sin t)$, find

साइक्लाइड $x = a(1 - \cos t)$, $y = a(t + \sin t)$ के लिए निम्न ज्ञात कीजिए :

$$\frac{ds}{dt}, \frac{ds}{dx} \text{ and (तथा) } \frac{ds}{dy}$$

- (b) Show that the radius of curvature at any point (x, y) of the astroid $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ is three times perpendicular length dropped from the origin on the tangent.

सिद्ध कीजिए कि एस्ट्रायड $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ के किसी बिन्दु (x, y) पर वक्रता त्रिज्या, मूलबिन्दु से स्पर्श रेखा पर खींचे गए लम्ब की लम्बाई की तीन गुनी होती है।

- 4 (a) If $u = \sin^{-1} \left(\frac{x^{1/4} + y^{1/4}}{x^{1/5} + y^{1/5}} \right)$ then prove that :

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{20} \tan u.$$

यदि $u = \sin^{-1} \left(\frac{x^{1/4} + y^{1/4}}{x^{1/5} + y^{1/5}} \right)$ तो सिद्ध कीजिए कि :

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{20} \tan u.$$

- (b) If $u = f \left[\left(\frac{x}{y} \right), \left(\frac{y}{z} \right), \left(\frac{z}{x} \right) \right]$, then prove that :

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

यदि $u = f \left[\left(\frac{x}{y} \right), \left(\frac{y}{z} \right), \left(\frac{z}{x} \right) \right]$ तो सिद्ध कीजिए कि :

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

UNIT-III (इकाई-III)

5. (a) Find the envelope of the family of line $x/a + y/b = 1$ where the parameters a and b are connected as : $a^2 + b^2 = c^2$ where c is constant.

सरल रेखाओं $x/a + y/b = 1$ के कुल का अन्वालोप ज्ञात कीजिए जहाँ प्राचल a तथा b में निम्न संबंध है : $a^2 + b^2 = c^2$ जहाँ c अचर है।

- (b) Discuss the maxima and minima of the function $f(x, y) = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin(x + y)$ where $0 < x < \pi$ and $0 < y < \pi$.

फलन $f(x, y) = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin(x + y)$ के उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ की विवेचना कीजिए जहाँ $0 < x < \pi$ तथा $0 < y < \pi$.

6. (a) Find the asymptotes of the following curve :

$$x^3 - 2y^3 + xy(2x - y) + y(x - y) + 1 = 0.$$

निम्न वक्र के अनन्तस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए :

$$x^3 - 2y^3 + xy(2x - y) + y(x - y) + 1 = 0.$$

- (b) Determine the existence and nature of the double points on the curve :

$$(x - 2)^2 = y(y - 1)^2.$$

वक्र $(x - 2)^2 = y(y - 1)^2$ पर द्विक बिन्दुओं की विद्यमानता एवं उनकी प्रकृति का निर्धारण कीजिए।

UNIT-IV (इकाई-IV)

7. (a) Prove that :

सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1/n)}{n \Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right)}.$$

- (b) Evaluate the following integral by changing the order of integration :

निम्नलिखित समाकल में समाकलन का क्रम बदलकर मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{x/y} dx dy.$$

8. (a) Evaluate the following integral by changing to polar coordinates :

निम्न समाकल को ध्रुवीय निर्देशांकों में परिवर्तित कर मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^a \int_y^a \frac{x}{x^2 + y^2} dy dx.$$

- (b) Evaluate :

$$\iiint xyz dx dy dz$$

where the region of integration is the volume of the ellipsoid in the positive

octant $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\iiint xyz dx dy dz$$

जहाँ समाकलन का क्षेत्र धनात्मक अष्टांशक में दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ है।

UNIT-V (इकाई-V)

9. (a) Find by double integration the area lying between $x^2 + y^2 = a^2$ and $x + y = a$ in the first quadrant. <https://www.uoronline.com>

द्वि-समाकल से वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ तथा रेखा $x + y = a$ द्वारा प्रथम पाद में घिरे हुए क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

- (b) Find the volume generated by the revolution of curve $y(x^2 + a^2) = a^3$ about its asymptote.

वक्र $y(x^2 + a^2) = a^3$ को इसकी अनन्तस्पर्शी के सापेक्ष घुमाने से जनित ठोसों का आयतन ज्ञात कीजिए।

10. (a) Find the whole length of curve $x^2(a^2 - x^2) = 8a^2y^2$.

वक्र $x^2(a^2 - x^2) = 8a^2y^2$ की सम्पूर्ण लम्बाई ज्ञात कीजिए।

(b) Find the surface area of the solid generated by the revolution of the cycloid $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ about the line $y = 0$ (x-axis).

साइक्लॉइड $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ को रेखा $y = 0$ (x-अक्ष) के सापेक्ष घुमाने से जनित ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
